《研究ノート》

プロジェクトの総合的評価理論
『リスク鋭感的価値尺度法』

宮原 孝夫 著

日本リアルオプション学会
研究叢書　第１号
『リアルオプションと戦略』
第９巻 第２号（特別号）　2017年４月

[研究ノート]

プロジェクトの総合的評価理論
『リスク鋭感的価値尺度法』

名古屋市立大学名誉教授
宮原　孝夫
（E-mail: y-miya@econ.nagoya-cu.ac.jp）

（URL: http://www.econ.nagoya-cu.ac.jp/~miyahara/）

[Note]

Risk Sensitive Value Measure Meathods for Project Evaluations

Yoshio MIYAHARA
（E-mail: y-miya@econ.nagoya-cu.ac.jp）

（URL: http://www.econ.nagoya-cu.ac.jp/~miyahara/）

まえがき

プロジェクトの総合的な価値評価法として、「リスク鋭感的価値尺度法（Risk-Sensitive Value Measure Method）」を提唱したい。この評価法は、正味現在価値法を基礎としつつその弱点を補う形での評価法として筆者が [22] において提案したものであるが、本稿ではこの評価法の特徴や意義を明らかにし、さらにこの評価法の適用法を明示することを目指したい。

本稿により、リスクと価値の両者を考慮に入れた尺度としての「リスク鋭感的価値尺度」とリアルオプション・アプローチを組み合わせた価値評価法「リスク鋭感的価値尺度法」が非常に優れた評価法であり、種々のタイプのプロジェクトや投資の評価に対して有効であることを理解していただけるものと確信しております。

本 [研究ノート] の執筆に際しては、日本リアルオプション学会機関誌の編集委員の皆様（委員長の高森寛先生はじめ、森平爽一郎先生、中岡英隆先生、伊藤晴先生）に大変お世話になりました。謹んで感謝申し上げます。

２０１７年２月　　　　　　宮原　孝夫（みやはら　よしお）

目 次

第1章　序

プロジェクトの価値評価の問題は、現代ファイナンス理論あるいは現代のコーポレート・ファイナンス理論において最重要な研究課題であろう。この問題は、不確実性を内包しているキャッシュフローの価値をどのように評価するのが適切かという問題に帰着する。

不確実性を伴っている資産過程の価値を適切に評価する問題は、数理ファイナンス理論の主要な研究課題の一つである。したがって、数理ファイナンス理論の研究成果をプロジェクトの価値評価の問題に適用しようと試みることは自然な発想であろう。ただし、数理ファイナンス理論を適用しようとする場合にはその理論の前提条件を十分に注意しなくてはいけない。

効率的な市場の存在を前提として議論してよい問題ならば、標準的な理論（Black-Scholes の理論、無裁定理論、など）が適用可能である。しかしながらこの前提条件が満たされていないと考えられる場合が多く存在している。特にプロジェクトの価値評価の場合にはこの前提条件が満たされていないだけでなく、そのプロジェクト独自の特性やプロジェクトの推進母体 (企業) に固有の前提条件を考慮しなければならないのが一般的であろう。

従ってプロジェクトの価値評価の場合には、金融オプションを主たる対象として発展してきた数理ファイナンス理論の標準的な理論（裁定理論）の無原則的な適用は慎むべきであり、市場の効率性や流動性が必ずしも前提とできない場合に柔軟に対応できる新しい理論を構築することが必要である。こうして我々は次のような研究課題に到達する。

[研究課題]：裁定理論（「無裁定条件」を前提とした理論）に依存しない価値評価法（特にプロジェクト価値の評価法）を確立すること。

この課題に有効性を持ちうる事が期待できる既存の理論としては、効用関数に基づいた理論およびリスク尺度の理論がある。これらの理論を検討する中で、筆者は [22] において **＜プロジェクト価値の評価のためにもっとも適切とみなせる価値評価法は、リスク鋭感的価値尺度とリアルオプション・アプローチを組み合わせた「リスク鋭感的価値尺度法 (Risk-Sensitive Value Measure Method)」である＞**という結論を導いた。

本 [研究ノート] の目的は、上に揚げた［研究課題］に対する一つの回答としての「リスク鋭感的価値尺度法」の概要を説明し、この評価法の特徴および有効性を明確にすることである。さらにその上で、この評価法の応用可能な分野および適用法について解説したい。

本 [研究ノート] の構成は以下のとおりである。

まず第 2 章において、プロジェクト評価理論の現状と問題点を検討し、我々の研究すべき課題を提起する。それ以下の章でこの課題に対する我々の解答としての評価法「リスク鋭感的価値尺度法」を提示し、その解説を行う。第 3 章、4 章、5 章において、そ

の理論的な枠組みを提示し、この評価法の妥当性を論証する。第６章において、この評価法の静学的な問題への適用法を解説する。第７章においてはこの評価法の動学化を行い、それ以下の章（第８－１１章）で動学化された価値尺度によるプロジェクトの評価法を解説する。

第2章　プロジェクト評価理論の現状と課題

不確実性の下での企業戦略を考える上で、プロジェクト（事業）の価値評価を適切に行うことは基本的な要件である。プロジェクト評価の伝統的な方法は正味現在価値（NPV)法である。この方法は分かりやすく使いやすい反面、プロジェクトの持つ不確実性や柔軟性を十分に反映できていないという弱点がある。本章では、「これを克服しうる方法は何か?」という視点から、プロジェクト評価理論の現状と問題点を概観する。

2.1　現状認識

プロジェクト評価の現在の主流的な方法は、正味現在価値（NPV) 法である。この方法は分かりやすく使いやすいが、プロジェクトの持つ不確実性や柔軟性を包含した評価法であるとは言いがたい。それらを補う方法のひとつとしてリアル・オプションが導入されている。

NPV 法とリアル・オプションとを組み合わせた方法は有効性を期待できるが、いくつかの問題点も持っている。一番の問題点は、評価対象のプロジェクトが市場を前提にした理論を適用することが妥当なプロジェクトであるか否かである。妥当なものであれば金融オプションでなされている議論の多くが適用可能であろう。しかし、多くの場合には市場のない資産（non-tradable assets）を扱う問題であり、その場合には別の理論が必要になる。この場合に有効と思われる理論に、効用無差別価格（utility indifference price）とリスク尺度（risk measure）の理論があり、現在も進展中である。

プロジェクト評価理論は経営戦略の問題として扱われてきたが、少し視点を広げて、数理ファイナンスの視点から検討してみることも有用と思える。ただし、数理ファイナンスにおいて、「リスク評価」あるいは「リスク管理」という視点は強く意識されているが、「価値評価」という視点はあまり強く意識されていないように思われる。そして、多くの場合価値評価とリスク評価が分離して議論されている。しかし、「リスク評価」の問題は何らかの「価値評価」に関連して出てきているのが通例である。したがって、「リスク評価」の議論を行う場合にも「価値評価」という視点を持ちつつ議論することが肝要である。

[プロジェクト評価に関する問題意識]
・プロジェクト評価の現在の標準的な方法は <u>正味現在価値（NPV) 法</u> である。
・この方法は分かりやすく使いやすいが、プロジェクトの持つ <u>不確実性</u> や <u>柔軟性</u> を十分に反映できていない。
・強い <u>不確実性</u> を持ったキャッシュフロー列（確率過程）に対する適切な評価法が必要である。特に、<u>規模のリスク</u> を考慮に入れた評価法であることが重要である。
・その評価法は、プロジェクトの推進過程での <u>柔軟性</u> を反映しうる評価法であることが必要である。

この問題に対して次のような解決策が考えられる。

[解決策の提案]
・不確実性を持ったキャッシュフロー列に対する適切な価値尺度(value measure）を与えることを考える。
・その価値尺度は凹マネタリ価値尺度の定義を満たしているべきだ。
・効用無差別価格（utility indifference price）は凹マネタリ価値尺度になっている。
・効用無差別価格として定まる凹マネタリ価値尺度の中から適切な価値尺度の候補を選び出すことが考えられる。
・適切な凹マネタリ価値尺度が一つ定まったとして、この価値尺度とリアルオプション・アプローチとを組み合わせることにより、有効なプロジェクト評価法が得られる。
・現在までに得られている研究結果から見て、リスク鋭感的価値尺度法(Risk-Sensitive Value Measure Method) と呼ぶべき評価法がもっとも適切であると判断できる。$\langle$ この方法により、現在の標準的な NPV 法の弱点を克服しうる。$\rangle$

以上が筆者の主張する解決策である。以下本稿で、上の主張の妥当性を検証して行きたい。

2.2 正味現在価値（NPV）法とその問題点

2.2.1 正味現在価値（NPV）法の要点

従来からある標準的なプロジェクトの価値評価法は、正味現在価値（NPV）法、または割引キャッシュフロー (割引キャッシュフロー）法と呼ばれるものである。この方法は良く知られたものであり次のように要約できる。

あるプロジェクトの初期投資額 I_0 とキャッシュフロー列 $\mathbf{C} = \{C_t, t = 1, 2, \cdots, T\}$ が与えられたとする。このとき、キャッシュフローの現在価値（PV）は割引率 $1 + r$ を適当に定めることにより

$$PV(\mathbf{C}) = \sum_{t=1}^{T} \frac{C_t}{(1+r)^t}$$

で与えられる。正味現在価値（NPV）は

$$NPV(I_0, \mathbf{C}) = -I_0 + PV(\mathbf{C}) = -I_0 + \sum_{t=1}^{T} \frac{C_t}{(1+r)^t}$$

で定義され、この値の正負により、実行（投資）すべきプロジェクトか否かを判断する。

これが正味現在価値（NPV）法の要点である。これを、以下では古典的 NPV 法と呼ぶことにする。

2.2.2 古典的 NPV 法の問題点

古典的 NPV 法の問題点は、次の 3 点と言えよう。

（1）不確実性とリスク将来のキャッシュフローは不確実性を持っている。したがって、キャッシュフロー列 $\{C_t, t = 1, 2, \cdots, T\}$ は確率過程として扱われるべきであるが、通常は予想される平均値（期待値)、または何らかの意味での予測値で代用されている。不確実性の中身についての情報がほとんど無いならば仕方ないが、現実にはその分布などについてかなりの情報がありうる。それらの情報が十分には反映されていないと言える。不確実性に基づくリスクがあり、それを考慮に入れた評価が要請される。古典的なNPV法ではこのリスクへの考慮は割引率 $1+r$ を定める際になされる。それは経験的になされているのが一般的であり、理論的な道具としては分散が考慮に入れられている程度といえる。不確実性の中身についての情報がより多くあればその情報を利用した形でのリスクへの対処法があってしかるべきである。

（2）規模のリスク

プロジェクトの評価を考える場合、不確実性に伴うリスクとして特に「規模のリスク」が重要である。「規模のリスク」とは、生起確率は小さいが非常に大きな損失を伴うリスクが存在する場合に顕在化する。すなわち、平均的には高収益が見込まれる投資対象でもその一方で非常に大きな損失を生じる可能性が多少ともある場合には、投資規模を適切な大きさに抑制しておくことが必要であり、さもないと破産につながるようなリスクに遭遇する可能性が生じる。従って、規模が２倍になった場合のリスクは元のリスクの２倍より大きくなっていると判断すべきである。このようなリスクを規模のリスク」と呼ぶことにする。リーマンショック当時のデリバティブへの投資などの事例は、このような規模のリスク」への対応の必要性を示していると言えよう。

プロジェクト評価や投資の是非の判断をする場合、損失と利得のバランスを取った価値評価が必要であるが、さらに適切な投資規模を算定することも重要な課題であり、「規模のリスク」への考慮が内包されている評価法が要請されている。

（3）柔軟性

プロジェクトの実行は、一度判断を下したら最初の方針通りにづっと続けられるというものではない。中には途中での変更が不可能なものもあろうが、多くのものはいくつかの選択肢の中から状況に応じて適切な選択肢を選びながら実行されてゆく。このような状況に応じた選択の柔軟性は価値評価の際に考慮に入れられるべきである。

2.3　Value at Risk とその問題点

プロジェクトを評価するのに、収益とリスクとを分けて議論する場合もある。平均分散分析はその一つの例であり、収益を平均で測りリスクを分散で測っている。リスクを測る尺度として、バリューアットリスク（VaR）もよく使われている。

2.3.1　バリューアットリスク（VaR）:quantile method

定義 2.1 L を損失関数とする。$\beta \in (0,1)$ が与えられたとき、L の信頼水準 β の *VaR*（*value at risk*）とは、次式で定義される $VaR_\beta(L)$ のことである。

$$VaR_\beta(L) = \inf\{l \in \Re : P(L > l) \leqq 1 - \beta\} \tag{2.1}$$

バリューアットリスクの意味するところは、最大リスクをどの程度と判断すればよいかの判断基準を提示していることである。もちろん確率的な問題なので絶対視は出来ず、一つの目安ということになる。

これを投資判断の場合に利用しようとすれば、損益の最小値の目安の判断に使うことになる。

いま損益を X （収益はプラス、損失はマイナスで示している）とするとき、$L = -X$ を損失関数とみて、次のように定義することが考えられる。

定義 2.2 数値 $\beta \in (0,1)$ が与えられているとき、損益 X の信頼水準 β の 最小収益 $\widehat{VaR}$ （*value at risk of profit*）とは、次式で定義される $\widehat{VaR}_\beta(X)$ のことである。

$$\begin{aligned} & \widehat{VaR}_\beta(X) = -VaR_\beta(-X) = \sup\{x \in \Re : P(X > x) > \beta\} \\ = \ & \sup\{x \in \Re : P(X \leqq x) \leqq 1-\beta\} = \sup\{x \in \Re : F_X(x) \leqq 1-\beta\} \end{aligned} \tag{2.2}$$

注 2.1 $\widehat{VaR}_\beta(X)$ とは、信頼水準 β を与えたとき、X の分布の左側 $100(1-\beta)\%$ 点の値である。この値が負のときには損失を意味し、最悪の場合の損失の目安を示している。

2.3.2 Value at Risk の問題点

・バリューアットリスク（VaR）で測ったリスクは、分散投資により必ずしもは減少しない。これを例で見ておこう。

[例]　X、Y ：独立で、次のような分布とする。

$$P(X=-10)=0.007,\ P(X=0)=0.8,\ P(X=10)=0.193,$$
$$P(Y=-10)=0.007,\ P(Y=0)=0.8,\ P(Y=20)=0.193.$$

とする。この時、

$$L_X = -X, \quad L_Y = -Y, \quad L_{\frac{1}{2}X+\frac{1}{2}Y} = -\left(\frac{1}{2}X + \frac{1}{2}Y\right)$$

と置いて、これらの $VaR_{0.99}$ を求めてみる。

$$VaR_{0.99}(L_X) = 0, \quad VaR_{0.99}(L_Y) = 0. \tag{2.3}$$

$$VaR_{0.99}(L_{\frac{1}{2}X+\frac{1}{2}Y}) = 5. \tag{2.4}$$

となる。これは、次の確率計算より分かる。

$$\begin{aligned} & P(\frac{1}{2}X + \frac{1}{2}Y < -5) \\ = \ & P(X=-10, Y=-10) = 0.000049 < 0.01 \end{aligned} \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned} & P(\frac{1}{2}X + \frac{1}{2}Y \leq -5) \\ = \ & P(X=-10, Y=-10) + P(X=-10, Y=0) + P(X=0, Y=-10) \\ = \ & P(X=-10)P(Y=-10) + P(X=-10)P(Y=0) \\ & \qquad + P(X=0)P(Y=-10) \\ = \ & 0.007 \times 0.007 + 0.007 \times 0.8 + 0.8 \times 0.007 \\ = \ & 0.000049 + 0.0056 + 0.0056 = 0.011249 > 0.01. \end{aligned} \tag{2.6}$$

これより

$$VaR_{0.99}(L_{\frac{1}{2}X+\frac{1}{2}Y}) > \frac{1}{2}VaR_{0.99}(L_X) + \frac{1}{2}VaR_{0.99}(L_Y) \tag{2.7}$$

となり、分散投資により VaR で測ったリスクは高くなっている。

注 2.2 上の計算結果を $\widehat{VaR}_\beta(\cdot)$ の形で表現すると次のようになる。

$$\widehat{VaR}_{0.99}(X) = 0, \quad \widehat{VaR}_{0.99}(Y) = 0. \tag{2.8}$$

$$\widehat{VaR}_{0.99}(\tfrac{1}{2}X + \tfrac{1}{2}Y) = -5. \tag{2.9}$$

$$\widehat{VaR}_{0.99}(\frac{1}{2}X + \frac{1}{2}Y) < \frac{1}{2}\widehat{VaR}_{0.99}(X) + \frac{1}{2}\widehat{VaR}_{0.99}(Y) \tag{2.10}$$

分散投資により必ずしもリスクが減少しないようなリスクの評価法は、リスクに対する一般的な感覚に合致していない、と言える。

・すでに述べたように、VaR による評価はリスクへの意識のみで価値評価に対する視点は入っていない。適用対象がリスク評価のみに関心のあるもの（たとえば、災害保険など）であればそれでよいと言えようが、資産やプロジェクトの評価の場合にはこれだけでは不十分であり、価値を評価する他の評価法との併用が必要となる。

2.4 新しい視点と理論の導入

上で見た古典的 NPV 法の問題点を改良したり解決したりし得る可能性はいくつか考えられる。この点について考察する。

（１）期待効用理論と効用無差別価格

不確実性やリスクへの対応の仕方として、もっとも初等的に考えられることは平均と分散で対応しようというものであろう。これだけでは十分とは言えない、ということが NPV 法の問題点の（１）として挙げたことである。これに対する対応法としては、経済理論で基本的な効用の概念に基づいた期待効用理論がある。この理論に基づいた価格である効用無差別価格[1]が有効と思える。これらの理論については、次章で詳しく述べる。

（２）リスク尺度と価値尺度

リスク尺度は、保険の評価理論と関連して発展してきた面が強いが、その考え方はプロジェクトの価値評価に対しても有効な内容を持っている。価値尺度は効用無差別価格を一般化した概念といえる。本稿では価値尺度という立場からの議論展開を行う。

（３）規模のリスクへの考慮

価値尺度の立場で考えることを前提にした場合でも、問題点の（２）で述べた「規模のリスク」への考慮は欠かせない。これについては第 6 章で詳しく検討する。

（４）リアルオプション・アプローチ

オプションとはもともといくつかの選択肢の中から最適なものあるいは必要なものを選択することである。NPV 法の問題点の（３）で述べたように、プロジェクトの実行に当たってはいくつかの選択肢の中から最適なものを選択しうる。この柔軟性を考慮に入れた評価の可能性を持ったものとして、リアル・オプションの理論またはリアル・オプション・アプローチがある。

[1]類似のものとして確実性等価がある

現在のリアル・オプションの研究の中には 2 つの面が混在してしているように思える。その第 1 は、金融オプションについて得られた研究成果としての手法をリアル・オプションの分野に適用しようというものである。もうひとつは、オプションの価格理論という視点を持ちつつ、原資産の特長により既存のオプションの理論ではカバーされない分野の理論を確立しようというものである。

リアル・オプションという言葉はもともとは原資産が金融資産か実物資産かという意味での命名であるが、理論研究の立場で言えば、原資産過程の持つ経済学的な性質、すなわち、１）十分に効率的とみなせる市場が存在しているか、２）市場が存在していないか、３）その中間 (市場が存在するが必ずしも効率的とは言えない、または間接的に関連する市場がある、など）であるか、による違いでの議論の方が分かりやすく意味があるといえる。１）は「金融オプション」に関して標準的に研究されてきた裁定理論を基礎とした理論の対象である。２）は、いわゆる non-tradable assets に対する理論として現在発展中のものであり、３）もその延長上にある。

2.4.1　金融オプションとリアルオプション

[金融オプション] 金融オプションの場合、原資産の市場は一般に無裁定であると看做せる。その上で、完備性が成立すると考えられる場合と非完備であると考えられる場合とが在る。

[無裁定で完備] のモデル : 幾何ブラウン運動（Black-Scoles）モデル、２項過程モデル。

[無裁定で非完備] のモデル：幾何レヴィ過程モデル、多項過程モデル（３項以上)。

どちらの場合も、上の基本定理により、リスク中立測度（マルチンゲール測度）が存在しており、マルチンゲール理論が重要な役割を果たす。

[リアルオプション] リアルオプションの場合、原資産過程の市場は非完備なだけでなく裁定機会が存在すると考えられる場合が多い。このときには、複製ポートフォリオもリスク中立測度も存在しない。さらに、市場そのものが存在しない場合もある。

従って、金融オプションでの標準的な理論である「裁定理論」をそのままリアルオプションの議論の中に持ち込むことはできない。

価格と価値について

金融オプションは基本的に市場において取引され、従ってその価値は市場価格として評価される。すなわち、金融オプションの価格とは市場価値（＝交換価値）であり、裁定理論が適用されるのが自然である。従ってその価格体系は線形であり規模に対して一様である。

一方オプションの購入者にとって、そのオプションをその市場価格で購入することが自分（あるいは自社）にとって妥当か否かの判断は、別になされる。すなわち使用価値（＝そのオプションから得られる効用）と比較して市場価格が自身（あるいは自社）にとってその価格で買うだけの価値があるかを判断している。とりわけリアルオプションの場合には、市場価格で取引されるというよりは、個別の取引（あるいは、個別のプロジェクトへの投資判断）であり、個別に価値評価をする必要が生じる。そこでは前提となるような線形な価格体系は存在していない。

これが、「裁定理論」とは別の「価値評価理論」が必要とされる理由である。

2.5　無裁定条件を前提としない価値評価法

前節で述べたことより、リアルオプションの評価（およびそれを基礎としたプロジェクトの評価）のためには金融オプションで標準となっている無裁定条件を前提とした理論や手法は、（少なくともそのままの形では）適用不可能である。したがって、無裁定条件を前提としない評価法の開発が必要となる。

現在ある理論の中でこの要請に答えられる可能性のあるものとしては、期待効用最大化に基づく考え方とリスク尺度（または価値尺度）の考え方の２つがある。どちらも、リスクまたは価値を測る尺度（あるいは判断基準) を与えようというものである。

2.5.1　期待効用理論

効用関数を $u(x)$ とする。リターン（収益）は不確実であるので、これを確率変数 X で示すことにする。この時に得られるであろう効用は $u(X)$ である。その期待値 $E[u(X)]$ を期待効用と呼び期待効用の大きいものを価値が高いものと判断する。

効用関数としては指数型効用関数 $u(x) = 1 - e^{-\alpha x}, \alpha > 0,$ と冪型効用関数 $u(x) = x^{\beta}, 0 < \beta < 1$ とがよく使われる。$u(x) = x$ のときには $E[u(X)] = E[X]$ であり期待効用は単なる平均と同じになる [2]。

[期待効用理論に基づいた評価法については、第３章で検討する。]

2.5.2　価値尺度

リスク尺度の議論はよくなされているが、我々が必要としている尺度はリスクと価値とを統合して総合的に評価できるような尺度である。そのような尺度を価値尺度と呼ぶことにしたい。価値尺度についての詳しい議論は第４章ですることとし、ここでは価値尺度の役割を果たすことのできそうないくつかの評価尺度を見ておこう。

確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ が与えられているものとし、$\mathbf{L}$ を $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上で定義された可積分な確率変数の全体とする。この空間 $\mathbf{L}$ の要素 X はランダムなリターンを示す確率変数であるものと想定する。リターンの価値尺度として、空間 $\mathbf{L}$ の部分空間 $\mathbf{L}_0$ 上で定義された実数値関数 $v(X)$ の中で、価値の尺度としてふさわしい性質を持っているものを採用したい。ここで、部分空間 $\mathbf{L}_0$ は、評価対象としたい確率変数を十分多く含んでいるものとする。

[価値尺度の候補]

リスク管理論やプロジェクト評価理論などの中で検討されてきたリスクや価値の評価法がいくつかある。それらの中から、主なものを列挙しておこう。上で述べた価値尺度との関連については４章で検討する。

・「VaR」（あるいは §2.3 の $\widehat{VaR}$）。

・「NPV」。

・NPV と $\widehat{VaR}$ との組み合わせ。

---

[2]効用関数 $u(x)$ の定義域は、消費のような場合には $\{x \geq 0\}$ でよいが、リスクのあるリターンを扱う場合には $\{-\infty < x < \infty\}$ で考えたい。以下では、$u(x)$ の定義域は $\{-\infty < x < \infty\}$ であるものとする。

・「平均分散分析」。
・「確実性等価」。
・「効用無差別価格」。

定義 2.3 $u(x)$ を効用関数とし X を確率変数とするとき、

$$E[u(X-p)] = u(0)(=0) \tag{2.11}$$

により定まる p を、効用関数 $u(x)$ から定まる X の効用無差別価格と呼び、$p(X)$ と書く。

・「期待値（$E[X]$）」、または測度変換した確率での期待値。たとえば Esscher 変換した確率についての期待値（$E[X\frac{e^{hR}}{E[e^{hR}]}]$、$R$ はリスク変量）。
・「重みつき期待値」: 重み $w(x)$, ただし $w(x) > 0,\ E[w(X)] = 1$、をつけた期待値 $E[Xw(X)]$ は、意味が有るように思える。特に効用関数 $u(x)$ の限界効用 $u'(x)$ で重みを付けた期待値 $\frac{E[Xu'(X)]}{E[u'(X)]}$ は意味が有るように思える。効用関数 $u(x)$ として指数型効用関数を採用した場合には「エッシャー変換値」（$\frac{E[Xe^{hX}]}{E[e^{hX}]}$）となる。

[価値尺度については、第４章で詳しく検討する。]

第3章　期待効用理論に基くプロジェクトの評価法

3.1　効用関数と期待効用

効用関数を $u(x)$ とする。リターン（収益）は不確実であるので、これを確率変数 X で示すことにする。この時に得られるであろう効用は $u(X)$ である。その期待値 $E[u(X)]$ を期待効用と呼び期待効用の大きいものを価値が高いものと判断する。

効用関数としては指数型効用関数 $u(x) = 1 - e^{-\alpha x}, \alpha > 0,$ と冪型効用関数 $u(x) = x^{\beta}, 0 < \beta < 1$ とがよく使われる。$u(x) = x$ のときには $E[u(X)] = E[X]$ であり期待効用は単なる平均と同じになる [1]。

効用関数を利用して価値の評価尺度としては次の３つがある。

（１）効用無差別価値

（２）確実性等価

（３）限界効用による重みづけ期待値

本稿ではこのうち（１）効用無差別価値を中心に議論する。

3.2　効用無差別価値

リターン X の期待効用理論に基づく価値として、効用無差別価値に注目して議論する。

3.2.1　投資家の立場から見た効用無差別価値

X なるランダムな現在価値を生む資産 (またはプロジェクト）の価値を投資家（あるいは事業者）の立場から見たときの評価として、「効用無差別価値」が次のように定義される。

定義 3.1 $u(x)$ を効用関数とし X を確率変数とするとき、

$$E[u(-v + X)] = u(0)(= 0) \tag{3.1}$$

により定まる v を、効用関数 $u(x)$ から定まる X の効用無差別価値（*utility indifferent value*）[2]。と呼び、$v_u(X)$ と表記する。

---

[1] 効用関数 $u(x)$ の定義域は、消費のような場合には $\{x$
$geqq0\}$ でよいが、リスクのあるリターンを扱う場合には $\{-\infty < x < \infty\}$ で考えたい。以下では、$u(x)$ の定義域は $\{-\infty < x < \infty\}$ であるものとする。

[2] 似た概念である「確実性等価」は、$u(c) = E[u(X)]$ なる c として定義される。

この定義の意味は、ランダムな収益 X を手にするのに $v_u(X)$ を支払ってもよいと評価しているということである。

注 3.1 より正確には、現在の所有量が x_0 であるとき、$E[u(x_0 - v + X)] = u(x_0)$ となる v と定義され、一般には v は x_0 に依存して決まる。

注 3.2 効用無差別価値の上の定義は市場が考慮に入っていない場合である。市場を考慮に入れた効用無差別価値については第 9 章を見よ。また、オプション価格に関連した効用無差別価格の議論については、[2] または [19, pp.102-103] を見よ。

$u(x) = x$ の時には $v_u(X) = E[X]$ となり平均値と一致するが、一般の効用関数の時には平均値とは異なった値になる。効用関数 $u(x)$ が上に凸な関数のとき、一般に $v_u(X) \leqq E[X]$ が成立する。 実際、Jensen の不等式により

$$u(-v + E[X]) \geqq E[u(-v + X)] = u(0)$$

であり、$u(x)$ の単調性より $-v + E[X] \geqq 0$ が成立する。これで $v_u(X) \leqq E[X]$ が言えた。

X がリスクのないとき、すなわち X がノンランダム（$X = m = const.$ とする）なときには $v_u = m = E[X]$ であるが、X がリスクのあるときには一般に $v_u(X) < E[X]$ となり、X の価値 $v_u(X)$ は $E[X]$ より $E[X] - v_u(X)$ だけ低くなる。この差 $E[X] - v_u(X)$ は X のリスク・プレミアムと呼ばれる。期待値 $E[X]$ のみに注目している場合には、この X のリスク・プレミアムを考慮に入れていないことになる。その分甘い評価をしていることになる。

例 3.1 効用関数として指数型効用関数

$$u_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha}\left(1 - e^{-\alpha x}\right), \quad \alpha > 0 \tag{3.2}$$

を採用した場合に得られる効用無差別価値は

$$U^{(\alpha)}(X) = -\frac{1}{\alpha}\log E[e^{-\alpha X}], \quad \alpha > 0 \tag{3.3}$$

である。

注 3.3 上の $U^{(\alpha)}(X)$ は「リスク鋭感的価値尺度」と呼ばれるものであり、本 [研究ノート] の主要な研究対象である。第 5 章で詳しく見る。

注 3.4 期待効用による評価と効用無差別価値による評価とは、次の意味で必ずしも整合的ではない。すなわち、次の関係が成立するとは限らない。

$$v_u(X) > v_u(Y) \quad \Leftrightarrow \quad E[u(X)] > E[u(Y)]. \tag{3.4}$$

[反例による説明] 次の効用関数の下で考える。

$$u(x) = \begin{cases} x, & x \geqq 0, \\ 2x, & x < 0. \end{cases} \tag{3.5}$$

２つの変量 X, Y が次のように与えられているものとする。

$$P(X=0)=P(X=10)=\tfrac{1}{2}, \tag{3.6}$$
$$P(Y=3)=P(Y=5)=\tfrac{1}{2}. \tag{3.7}$$

このとき、次のような計算結果になる。

$$E[u(X)]=5, \quad E[u(Y)]=4, \tag{3.8}$$
$$v_u(X)=\tfrac{10}{3}, \quad v_u(Y)=\tfrac{11}{3}. \tag{3.9}$$

したがってこの場合、$E[u(X)]>E[u(Y)]$ であるが $v_u(X)<v_u(Y)$ となっており、期待効用での評価の優劣と効用無差別価値での評価の優劣とが逆転している。（注。上の「リスク鋭感的価値尺度」については、対応する指数型効用関数の期待効用による評価と整合的であることが言える。第５章を参照せよ。）

3.2.2 リスクの引き受け手から見た効用無差別リスク

期待効用理論の立場でリスクを評価する立場からは、次「効用無差別リスク」が定義される。

定義 3.2 $u(x)$ を効用関数とし X を確率変数とするとき、

$$E[u(\rho+X)]=u(0)(=0) \tag{3.10}$$

により定まる ρ を、効用関数 $u(x)$ から定まる X の効用無差別リスクと呼び、$\rho_u(X)$ と書く。

これは、危険資産の損益 X を $\rho_u(X)$ を受け取れば引き受けてよい、ということである。例えば、支払いが X （$=$ 損失 $\leqq 0$）である保険に対する掛け金が $\rho_u(X)$ である。あるいは、未回収金額が X （ $=$ 回収金額 - 融資額 $\leqq 0$）が予想されるときの担保金額が $\rho_u(X)$ である。

注 3.5 効用関数 $u(x)$ を *1* つ固定したとき、効用無差別価値 $v_u(X)$ と効用無差別リスク $\rho_u(X)$ の間には、定義より次の関係がある。

$$\rho_u(X)=-v_u(X). \tag{3.11}$$

3.3 プロジェクトの効用無差別正味現在価値

リスク・プレミアムを考慮に入れた価値評価法を、NPV 法の考え方を踏襲しつつ上の効用無差別価格の理論に基づいて導入しよう。

プロジェクトとは、現時点での投資額（初期投資額） I_0 と次期以降の収益（または損益）のキャッシュフロー

$$\mathbf{C}=\{C_1,C_2,\cdots,C_T\}$$

とからなっているものとする。ここで $\mathbf{C}$ は不確実性のあるキャッシュフロー (すなわち確率過程) である。以下、割引率を $1+r$ として、このキャッシュフローの現在価値および正味現在価値を考察する。

（1）キャッシュフロー C の古典的現在価値

古典的 NPV 法では平均の現在価値を計算する。したがって、現在価値（PV）と正味現在価値（NPV）は次式で与えられる。

$$PV(\mathbf{C}) = \sum_{t=1}^{T} \frac{E[C_t]}{(1+r)^t}, \quad NPV(\mathbf{C}) = -I_0 + PV(\mathbf{C}).$$

ここで、$PV(\mathbf{C})$ は次のようにも表現されることを注意しておこう。

$$PV(\mathbf{C}) = \sum_{t=1}^{T} \frac{E[C_t]}{(1+r)^t} = E\left[\sum_{t=1}^{T} \frac{C_t}{(1+r)^t}\right].$$

（2）キャッシュフロー C の期待効用理論に基づく現在価値

キャッシュフローがランダムな場合には、その現在価値もランダムなものと考える方が自然な考え方である。すなわち、古典的 PV の計算式において期待値をとる前のランダムな現在価値に注目し、ランダムなキャッシュフロー $\mathbf{C}$ の ランダムな現在価値 $RPV(\mathbf{C})$ (random present value) を

$$RPV(\mathbf{C}) = \sum_{t=1}^{T} \frac{C_t}{(1+r)^t}$$

で定義する。ここで、$RPV(\mathbf{C})$ は確率変数であること、および $E[RPV(\mathbf{C})] = PV(\mathbf{C})$ なる関係を注意しておこう。

以下、効用関数 $u(x)$ を 1 つ固定しておく。上で定義したランダムな現在価値 $RPV(\mathbf{C})$ の効用無差別価格を考え、それを $\mathbf{C}$ の 効用無差別現在価値（utility indiference present value）と呼び、$UIPV_u(\mathbf{C})$ で示すことにする。$UIPV_u(\mathbf{C})$ は次の v についての方程式

$$E[u(-v + RPV(\mathbf{C}))] = 0$$

の解である。

さらに、$\mathbf{C}$ の 効用無差別正味現在価値（utility indiference net present value）$UINPV_u(\mathbf{C})$ を次の $\hat{v}$ についての方程式

$$E[u(-\hat{v} - I_0 + RPV(\mathbf{C}))] = 0$$

の解として定義する。

v と $\hat{v}$ についての方程式を比較して $v = \hat{v} + I_0$ なる関係が分かる。これより

$$UINPV_u(\mathbf{C}) = -I_0 + UIPV_u(\mathbf{C}). \tag{3.12}$$

の関係が分かる。あるいはこの式を $UINPV_u(\mathbf{C})$ の定義式に採用しても同じである。

定義 3.3 効用無差別正味現在価値 $UINPV_u(\mathbf{C})$ の値によりプロジェクトの価値を評価する方法を、効用無差別正味現在価値法 と呼ぶことにする。

注 3.6 ここで、効用関数として $u(x) = x$ を採用した場合には $UINPV_u(\mathbf{C})$ は古典的な $NPV(\mathbf{C})$ に一致することを注意しておこう。

3.4 リアル・オプションアプローチの導入

前節で述べたプロジェクトの価値評価の方法は、期待効用理論を基本として、その理論の枠組みの中で NPV 法の考え方を拡張したものである。この方法は、古典的な NPV 法の弱点のうち、（１）の不確実性と（２）のリスクへの対応を図ったものである。さらの（３）の柔軟性を取り入れた理論の構築にはオプションの評価の理論が必要である。

その理論として有力なものはリアル・オプションの理論である。ただし、すでに述べたように、リアル・オプション法を採用する場合にはその前提条件を十分に注意しなくてはいけない。もしも市場の存在の前提が満たされていれば、オプション価格の標準的な理論（Black-Scholes の理論など）が適用可能である [3]。 しかし、プロジェクトの価値評価の場合にはこの前提が満たされていないのが一般的であると考えられる。

従って、プロジェクトの価値評価の場合に有効と考えれる方法は、リアル・オプションや数理ファイナンスの理論の中で non-tradable asset に関するオプションの価格理論の部分であると言うことができる。この分野で重要なものは効用無差別価格理論とリスク測度の理論である。この考えに従って、前節ですでに効用無差別価格理論を取り入れた議論をした。本節では、これの延長上にリアル・オプション・アプローチを加味してプロジェクトの柔軟性を考慮に入れた評価法を確立する [4]。

（１）基本となるプロジェクトの確定

価値評価の対象となるプロジェクトの内容を明確にしなくてはならない。そして、初期投資額 I_0 およびキャッシュフロー $\mathbf{C} = \{C_1, C_2, \cdots, C_T\}$ を算定する。ここでキャッシュフローは不確実性を伴っており、確率過程（＝時系列）として定式化される。その確率的な性質（分布など）は特定化されているものとする。

（２）効用関数の確定

期待効用理論を適用するためには、適切な効用関数を一つ採用し確定しておく必要がある。どのようなタイプの効用関数を採用するかは、プロジェクトの実施主体の考え方に依存して決定すべきものであるが、標準的なものとしては指数型効用関数 $u_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha}(1 - e^{-\alpha x}), \alpha > 0,$ を採用し、リスク回避度のパラメーター α の決め方を工夫するのが妥当な方法の一つと言えよう。

（３）基本となるプロジェクトの価値評価

基本プロジェクトの初期投資額、キャッシュフロー、および効用関数が定まれば、前節で述べた期待効用理論に基づいた方法・手順により基本プロジェクトの価値を評価することができる。

１）ランダム現在価値 $RPV(\mathbf{C})$ を計算する。これは確率変数であり、分布を持っている。

２）効用無差別現在価値 $UIPV(\mathbf{C})$ を計算する。これは、キャッシュフロー $\mathbf{C} = \{C_1, C_2, \cdots, C_T\}$ の期待効用理論に基づく現在価値である。

３）効用無差別正味現在価値 $UINPV(\mathbf{C})$ を計算する。これは、期待効用理論に基づくプロジェクトの正味現在価値である。

（４）適用可能なオプションの検討

[3] 事実、標準的なリアル・オプションの書物のほとんどははこのような立場で書かれているように思える。
[4] 効率的な市場を前提にした議論の場合には、標準的なリアル・オプションの方法を適用できるので、それで十分だろう。本稿は、この前提が成立していない場合に適用可能な方法の開発を目指している。

基本となるプロジェクトに関して、適用可能なオプション（延期オプション、拡大オプション、など）が存在するかを検討する。存在する場合には、それらのオプションの付いたプロジェクトについて価値評価をすることになる。なおこの時、オプション採用に伴う追加費用とオプション付プロジェクトのキャッシュフローを算定しておかねばならない。

（５）オプション付プロジェクトの価値評価

オプション付プロジェクトがいくつか考えられるとき、その各々に対して期待効用理論に基づいた価値評価を行う。すなわち、その各々に対して新たに算定された初期費用と（追加費用も含んだ）キャッシュフローに基づいて効用無差別正味現在価値の計算を行う。

（６）プロジェクト採用の可否の判断

以上から、いくつかのオプション付プロジェクトの効用無差別正味現在価値が得られていることになる。この値が一番高いものが考えられる中でベストなものと判断される。その値が正値であるとき、対応する（オプション付）プロジェクトの実行が検討されることになろう。もしもその値が負値であったならば、プロジェクトは実行されないことになろう。

3.5　確率的最適制御問題としての定式化

前節で述べたオプション付きプロジェクト（＝シナリオ）の選択は、いくつかある採用可能なオプションの中から、どれだけのオプションを採用するのが最適か（＝効用無差別正味現在価値（UINPV）の最大化）という問題を解くことである。

採用するオプションの組み合わせの選択を一つの戦略と看做すことにすれば、最適なオプションの選択とは最適戦略を見出す問題である。

こうして、我々の問題は確率的最適制御の問題に定式化することが可能となる。これは、効用関数 $u(x)$ を１つ固定した上で、概ね次のように定式化される。

１．戦略 $\Phi=\{\phi_1,\phi_2,\cdots,\phi_T,\}$ のクラスを定義する。

２．プロジェクトの、初期投資額およびキャッシュフローは戦略に依存するので、それぞれ I_0^Φ および $\mathbf{C}^\Phi=\{C_1^\Phi,C_2^\Phi,\cdots,C_T^\Phi\}$ と表現することにするしよう。それに応じて、対応する効用無差別正味現在価値（UINPV）も $UINPV(I_0^\Phi,\mathbf{C}^\Phi)$ と表現する。

３．次の最適制御問題を解くことになる。

$$\overline{UINPV}=\sup_{\Phi} UINPV(I_0^\Phi,\mathbf{C}^\Phi)$$

４．この値 $\overline{UINPV}$ がリアルオプション・アプローチによるプロジェクトの価値である。この値が正であるとき、最適（または最適に近い）オプション付きのプロジェクトを実行することとなる。

注 3.7 上の効用無差別正味現在価値の最大化は、採用された効用関数が、期待効用での評価と効用無差別価値での評価とが整合的なものである場合には、期待効用最大化と同等である。整合的でない効用関数の場合には同等にならない。リスク鋭感的価値尺度の場合には、期待効用最大化と同等になることが分かっている。（第５章、定理 *5.2* を参照せょ。）

3.6　オプション概念を加味した期待効用理論が有効性をもちうる分野

• 期待効用理論とリアルオプションの概念は、不確実性の存在しているあらゆる分野で有効性を持ちうるものである。
• リアルオプションを広い意味で解釈すれば、これまで述べてきたような期待効用理論に基づいた議論はその中に含めることもできるが、リアルオプションを狭い意味で解釈すれば（すなわち、市場を前提としたオプション理論と限定すれば）、期待効用理論アプローチと（狭義の）リアルオプション・アプローチとは区別して考えた方が良い。
• その区別は、評価対象が次の（a）（b）のどちらであるかに依存している。

（a）市場で取引されていると原資産に基づくオプションと見做せる。
（b）市場で取引されている原資産に基づくオプションと見做すことが出来ない。

• 期待効用理論アプローチは（b）の場合に有効なアプローチである。具体的な事例について検討する場合には、（a）と（b）のどちらで考えるのが適切か判断しにくい場合も多いと思うが、（b）としての扱いの重要性が増してきている。
• 期待効用理論アプローチが有効に働くと考えられる分野として次のようなものが挙げられる。
（１）事業価値評価、プロジェクト・ファイナンス
（２）資源開発、新事業の立ち上げ
（３）知財評価、ベンチャービジネスの評価

補論：２次の効用関数について

効用関数として、２次関数

$$u(x) = -\frac{1}{2}\alpha x^2 + x = -\frac{1}{2}\alpha x\left(x - \frac{2}{\alpha}\right), \quad \alpha > 0, \tag{3.13}$$

を採用した場合を考察してみよう。この関数は凹関数であるが $x \geqq \frac{1}{2}\alpha$ では単調増加でないので、効用関数としては必ずしも適切な関数ではない。しかし、扱う数量が $x \leqq \frac{1}{2}\alpha$ の範囲であれば意味があるし、もしそれから外れた場合でも

$$\begin{aligned} E[u(X)] &= -\frac{1}{2}\alpha E[X^2] + E[X] = E[X] - \frac{1}{2}\alpha E[X]^2 - \frac{1}{2}\alpha V[X] \\ &= u(E[X]) - \frac{1}{2}\alpha V[X] \end{aligned} \tag{3.14}$$

なる関係式から分かるように、平均・分散分析による最適化を同じことになっているので、その点からも意味のあるものである。

・この関数の絶対的リスク回避度は

$$R_{abs}^{(u)}(x) = -\frac{\alpha}{1 - \alpha x} \tag{3.15}$$

であり、原点での絶対的回避度は α である。

・効用無差別価値は、$E[u(-p+X)] = 0$ より導かれる次の方程式

$$\alpha p^2 + 2(1 - \alpha E[X])p - (2E[X] - \alpha E[X^2]) = 0 \tag{3.16}$$

の解である。意味のある解として

$$p = \frac{-(1-\alpha E[X]) + \sqrt{1-\alpha^2 V[X]}}{\alpha} = E[X] - \frac{1}{2}\alpha V[X] + O(\alpha^2) \tag{3.17}$$

を得る。すなわち、近似的に平均・分散分析と同じ評価になっている。

・確実性等価については、方程式 $u(c) = E[u(X)]$ は

$$\alpha c^2 - 2c + (2E[X] - \alpha E[X^2]) = 0 \tag{3.18}$$

となり、X の値が $(-\infty, \frac{1}{\alpha})$ 内にあるものと想定して、解

$$c = \frac{1 - \sqrt{1 - 2\alpha E[X] + \alpha^2 E[X^2]}}{\alpha} = E[X] - \frac{1}{2}\left(V[X] + 2E[X]^2\right)\alpha + O(\alpha^2) \tag{3.19}$$

を得る。この形も平均・分散分析の形に近いが、効用無差別価値よりも誤差は大きい。

第4章　凹マネタリ価値尺度

4.1　プロジェクトのリターン

前章で導入したプロジェクトの基本構造を出発点とする。すなわち、現時点での投資額（初期投資額）I_0 と時期以降の収益（または損益）のランダムなキャッシュフロー $\mathbf{C} = \{C_1, C_2, \cdots, C_T\}$ とが与えられているものとする。このときランダムなキャッシュフロー $\mathbf{C}$ の ランダムな現在価値 $RPV(\mathbf{C})$

$$RPV(\mathbf{C}) = \sum_{t=1}^{T} \frac{C_t}{(1+r)^t}$$

が定義されている。ここで、ランダムな正味現在価値 $RNPV(\mathbf{C})$ (random net present value) を

$$RNPV(\mathbf{C}) = -I_0 + RPV(\mathbf{C}) = -I_0 + \sum_{t=1}^{T} \frac{C_t}{(1+r)^t}$$

で定義する。この確率変数 $RNPV(\mathbf{C})$ はプロジェクト $\{I_0, \mathbf{C}\}$ の損益を現在価値にして表現している。この確率変数 $RNPV(\mathbf{C})$ を プロジェクト $\{I_0, \mathbf{C}\}$ のリターン と呼ぶことにする。

プロジェクトを評価しようとする場合、そのプロジェクトからの収益を期待しているので、期待収益 $E[RNPV(X)]$ が正になることがプロジェクト採用のための前提条件であろう。しかし条件 $E[RNPV(X)] > 0$ だけでは十分ではない。リスクについての判断も必要であり、収益性とリスクとのバランスを考えた評価が必要である。

4.2　価値尺度

価値尺度として、次のようなものを想定する。

確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ が与えられているものとし、$\mathbf{L}$ を $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上で定義された可積分な確率変数の全体とする。この空間 $\mathbf{L}$ の要素 X はランダムなリターンを示す確率変数（すなわち、前節で導入した プロジェクトのリターン $RNPV(\mathbf{C})$ に当たるもの）であると想定する。リターンの価値尺度として、空間 $\mathbf{L}$ の部分空間 $\mathbf{L}_0$ 上で定義された実数値関数 $v(X)$ の中で、価値の尺度としてふさわしい性質を持っているものを採用したい。ここで、部分空間 $\mathbf{L}_0$ は、評価対象としたい確率変数を十分多く含んでいるものとする。

4.2.1　凹マネタリ価値尺度

価値尺度が持って欲しい最低限の性質をまとめたものとして、次のものがある。

定義 4.1 (凹マネタリ価値尺度) $\mathbf{L}_0$ 上で定義された実数値関数 $v(X)$ が次の性質を持つとき $v(X)$ を 凹マネタリ価値尺度 と呼ぶ。
(i) (正規性) : $v(0) = 0$ が成立する。
(ii) (マネタリ性) : m が実数のとき、$v(X+m) = v(X) + m$ が成立する。
　(注: (i) と (ii) より、$v(m) = m$ が成立する。)
(iii) (単調性) : (a) $X \geqq Y$ （i.e. $P(X \geqq Y) = 1$）ならば $v(X) \geqq v(Y)$ である。
　(b) $X \geqq Y$ で $P(X > Y) > 0$ ならば $v(X) > v(Y)$ である。
(iv) (凹性) : $0 \leqq \lambda \leqq 1$ のとき、$v(\lambda X + (1-\lambda)Y) \geqq \lambda v(X) + (1-\lambda)v(Y)$ が成立する。
(v) (法則不変性) : X の分布と Y の分布が等しいとき、$v(X) = v(Y)$ が成立する。

注 4.1 上記定義の各性質は、次のような意味があると解釈できる。
(i) (正規性) : 損益 0 と確定しているリターンの価値は 0 である。
(ii) (マネタリ性) : 確実に m だけ収益の多いリターンの価値は、m だけ増加する。（これと $v(m) = m$ と合わせてみると、マネタリの意味が分かりやすい。）
(iii) (単調性) : 価値の単調性であり、自然な要請である。
(iv) (凹性) : リスク回避的な態度の反映である。
(v) (法則不変性) : 確率変数としては異なっていても、その分布が同しいリターンは同等の価値があると評価される。

リスク評価の立場から見た同様の概念としてのリスク尺度の定義を与えておこう。

定義 4.2 (凸マネタリリスク尺度) $\mathbf{L}_0$ 上で定義された実数値関数 $\rho(X)$ が次の性質を持つとき $\rho(X)$ を 凸マネタリリスク尺度 と呼ぶ。
(a)（正規性）: $\rho(0) = 0.$
(b) (マネタリ性）: $\rho(X+m) = \rho(X) - m.$
(c) (単調性) : $X \leqq Y$ ならば $\rho(X) \geqq \rho(Y).$
(d) (凸性) : $0 \leqq \lambda \leqq 1$ のとき、$\rho(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leqq \lambda\rho(X) + (1-\lambda)\rho(Y).$
(e) (法則不変性) : X の分布と Y の分布が等しいとき、$\rho(X) = \rho(Y)$ が成立する。

注 4.2 　$v(X)$ が凹マネタリ価値尺度であるとき、$\rho(X) = -v(X)$ と置くと、$\rho(X)$ は凸マネタリリスク尺度である。逆に、$\rho(X)$ が凸マネタリリスク尺度であるとき $v(X) = -\rho(X)$ と置くと、$v(X)$ は凹マネタリ価値尺度になっている。

定義 4.3 (コヒーレント) 凸マネタリリスク尺度 $\rho(X)$ が次の性質
(f) (正一様性): $\rho(\lambda X) = \lambda\rho(X),\ \lambda > 0,$
を持っているとき、コヒーレントリスク尺度と呼ばれる。

注 4.3 価値尺度の適用対象は、一般に収益性のあるものであり、$E[X] > 0$ なるものを想定している。したがって、プロジェクトの評価とか投資対象の評価を念頭に置いている。

それに対して、リスク尺度はリスクの高いものを評価対象にしており、$E[X] < 0$ なるものを想定している。したがって、保険の価格の評価 [1] とか融資の際の回収不能金のリスクの評価 [2] 等を念頭に置いている。このことより、リスク尺度の場合にはコヒーレントなる性質が重要であると言える。

[1] 保険金の支払いを損失、すなわちマイナスの収益として評価する。
[2]（回収金額—融資額）をマイナスの収益として評価する。

4.2.2　凹マネタリ価値尺度の構成法

上で定義された凹マネタリ価値尺度を構成する方法として、効用関数に基づいた効用無差別価値による構成法がある。この構成法のためには次の定理が基本である。（注。効用無差別価値の定義は前章 定義 3.1 で与えられている。）

定理 4.1　効用関数 $u(x)$ が $(-\infty, \infty)$ 上で定義された滑らかな 凹関数であるとき、$u(x)$ から定まる効用無差別価値は凹マネタリ価値尺度になっている。

(証明）

(i)（正規性）これは $u(0) = 0$ の仮定から明らか。

(ii) (マネタリ性) 次の等式

$$E[u(-(v(X) + m) + (X + m))] = E[u(-v(X) + X)] = 0 \tag{4.1}$$

より

$$v(X + m) = v(X) + m \tag{4.2}$$

が得られる。

(iii) (単調性) $X \leqq Y$ と仮定しよう。X の効用無差別価格 $v(X)$ は次の方程式を満たしている。

$$E[u(-v(X) + X)] = u(0) = 0. \tag{4.3}$$

このとき、$Y \geqq X$ より

$$E[u(-v(X) + Y)] \geqq E[u(-v(X) + X)] = u(0) = 0. \tag{4.4}$$

であり、この不等式より $-v(X) \geqq -v(Y)$ が従い $v(X) \leqq v(Y)$ を得る。

(iv) (凹性) 効用関数 $u(x)$ の凹性と効用無差別価格 $v(X)$ の定義より

$$\begin{aligned}
& E[u(-(\lambda v(X) + (1-\lambda)v(Y)) + (\lambda X + (1-\lambda)Y))] \\
= \;& E[u((\lambda(-v(X) + X) + (1-\lambda)(-v(Y) + Y))] \\
\geqq \;& E[\lambda u(-v(X) + X) + (1-\lambda)u(-v(Y) + Y))] \\
= \;& \lambda E[u(-v(X) + X)] + (1-\lambda)E[u(-v(Y) + Y))] \\
= \;& 0
\end{aligned}$$

なる次の関係が分かる。これより

$$-(\lambda v(X) + (1-\lambda)v(Y)) \geqq -v(\lambda X + (1-\lambda)Y) \tag{4.5}$$

となり

$$\lambda v(X) + (1-\lambda)v(Y) \leqq v(\lambda X + (1-\lambda)Y) \tag{4.6}$$

を得る。

(v) (法則不変性) 効用無差別価格 $v(X)$ は定義より X の分布で決まる。　□

例 4.1 効用関数として指数型効用関数

$$u_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha}\left(1 - e^{-\alpha x}\right), \quad \alpha > 0 \tag{4.7}$$

を採用した場合に上の *Proposion* の結果として得られる *concave monetary value measure* は

$$U^{(\alpha)}(X) = -\frac{1}{\alpha}\log E[e^{-\alpha X}], \quad \alpha > 0 \tag{4.8}$$

である。

定義 4.4 　上の $U^{(\alpha)}(X) = -\frac{1}{\alpha}\log E[e^{-\alpha X}]$ を「リスク鋭感的価値尺度（*RSVM*）」（*risk-sensitive value measure* ）と呼ぶ。（第 5 章、定義 5.1 参照。）

RSVM の性質については第 5 章以下で詳しく見る。

4.2.3　価値尺度のその他の候補

リスク管理論やプロジェクト評価理論などの中で検討されてきたリスクや価値の評価法がいくつかある。それらについて、上で述べた凹マネタリ価値尺度との関連を見ておこう。

1) 期待値（Expectation）： $E[X]$ （凹マネタリ価値尺度になる。ただし、リスクに対する意識無し。）

注 4.4 裁定理論による市場価格は、Q を同値マルチンゲール測度として、$E_Q[X]$ なる形をしている。X について線形である。

・「期待値（$E[X]$）」は、コヒーレントである。従って測度変換した確率での期待値もコヒーレントになる。

たとえば Esscher 変換した確率についての期待値（$E[X\frac{e^{hR}}{E[e^{hR}]}]$、$R$ はリスク変量）は X の関数としてコヒーレントである。

2) 平均分散分析： $E[X] - \alpha V(X)$ または . $E[X] - \alpha\sigma(X)$。((iii) の (a) も (b) も満たさない。他の条件は満たされる。)

3) VaR**：** （$-VaR$ はコヒーレントであるが、(iv) を満たさない。§2.3.2 を見よ。）

4) 期待効用： $E[u(X)]$. （マネタリではない。）

5) 確実性等価（certainty equivalence）： 次の方程式を満たす $c(X)$：

$$u(c(X)) = E[u(X)]. \tag{4.9}$$

・ 確実性等価 $c(X)$ が性質 (ii)（マネタリ性）を持たないような効用関数の例が容易に作れる。

6) 効用無差別価格（utility indifference price）： 次の方程式を満たす $p(X)$：

$$E[u(X - p(X))] = u(0) = 0. \tag{4.10}$$

注 4.5 ここでの定義は市場を考慮に入れていない場合であり、かつ X の買い手から見た効用無差別価格である。

・「効用無差別価格」: 凹マネタリ価値尺度 になる。一般にコヒーレントの条件 (f) は満たされない。

7) 重みづけ期待値（Weighted expectation）:

$$E^{(w)}[X] = E[Xw(X)], \tag{4.11}$$

ここで、$w(x) \geqq 0$、は重みづけ関数であり、 $E[w(X)] = 1$ である。
　・重みづけ期待値は、一般にはマネタリにならない。

7') 限界効用による重みづけ期待値（marginal utility weighted expectation）: $w(x)$ が次の形の場合、限界効用による重みづけ期待値になっている。

$$w(x) = \frac{u'(x)}{E[u'(X)]}. \tag{4.12}$$

例 4.2 効用関数 $u(x)$ が

$$u(x) = \frac{1}{\alpha}\left(1 - e^{-\alpha x}\right), \quad \alpha > 0, \tag{4.13}$$

の場合の限界効用による重みづけ期待値は次のようになる。

$$\frac{E[Xe^{-\alpha X}]}{E[e^{-\alpha X}]}. \tag{4.14}$$

これは エッシャー変換値（*Esscher transformed value*）である。

・エッシャー変換値はマネタリになるが、一般の効用関数に対する限界効用による重みづけ期待値は一般にはマネタリにならない。

定理 4.2 エッシャー変換値 $\frac{E[Xe^{-\alpha X}]}{E[e^{-\alpha X}]}$ は性質 (iv) *concavity* を持たない。(反例は、[22] p.193, Prop.3 を見よ。)

注 4.6 エッシャー変換測度（*Esscher transformed measure*）は R を 市場リスク として、次の形である： $E^R[X] = \frac{E[Xe^{-\alpha R}]}{E[e^{-\alpha R}]}$.

以上の結果から、**＜上の候補の中で望ましい性質（凹マネタリ価値尺度の性質）を持っているのは、効用無差別価格 (utility indifference price) として定まる価値尺度のみである＞**と結論される。

注 4.7 $E[X]$ は効用関数 $u(x) = x$ の効用無差別価格である。

4.3　凹マネタリ価値尺度の特性

4.3.1　大域的凹性

定理 4.3 (global concavity) 凹マネタリ価値尺度 $v(X)$ は、次の性質を持つ。

(iv') (大域的凹性（global concavity）) :

$v(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leqq \lambda v(X) + (1-\lambda)v(Y) \quad \text{for } \lambda \leqq 0 \text{ or } \lambda \geqq 1.$

(証明）

1. $\lambda \geqq 1$ **の場合.**

$$Z = \lambda X + (1-\lambda)Y. \tag{4.15}$$

と置くと

$$X = \frac{1}{\lambda}Z + \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)Y \tag{4.16}$$

である。このとき、$0 < 1/\lambda \leqq 1$ に注意して、$v(\cdot)$ の性質 (iv) より

$$v(X) = v\left(\frac{1}{\lambda}Z + \left(1 - \frac{1}{\lambda}Y\right)\right) \geqq \frac{1}{\lambda}v(Z) + \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)v(Y) \tag{4.17}$$

となる。従って次式が成立する。

$$v(Z) \leqq \lambda v(X) + (1-\lambda)v(Y). \tag{4.18}$$

2. $\lambda \leqq 0$ **の場合.** 上と同じに定義された Z に対して

$$Y = \frac{1}{1-\lambda}Z + \left(1 - \frac{1}{1-\lambda}\right)X \tag{4.19}$$

である。$0 < 1/(1-\lambda) \leqq 1$ に注意して (iv) より

$$v(Y) = v\left(\frac{1}{1-\lambda}Z + \left(1 - \frac{1}{1-\lambda}\right)X\right) \geqq \frac{1}{1-\lambda}v(Z) + \left(1 - \frac{1}{1-\lambda}\right)v(X) \tag{4.20}$$

が得られ、次式が成立する。

$$v(Z) \leqq \lambda v(X) + (1-\lambda)v(Y). \tag{4.21}$$

□

定理 4.4 凹マネタリ価値尺度 $v(\cdot)$ と (X, Y) に対して

$$\psi_{X,Y}(\lambda) = v(\lambda X + (1-\lambda)Y) \tag{4.22}$$

は λ の凹関数になる。

(証明)　証明のためには、 λ_1 と λ_2（$-\infty < \lambda_1, \lambda_2 < \infty$）に対して次の不等式

$$\psi_{X,Y}(a\lambda_1 + (1-a)\lambda_2) \geqq a\psi_{X,Y}(\lambda_1) + (1-a)\psi_{X,Y}(\lambda_2), \quad for \quad 0 \leqq a \leqq 1 \tag{4.23}$$

が成立することを示せばよい。この不等式を示す。

関数 $\psi_{X,Y}(\lambda)$ の定義より次の 2 つの等式が成立している。

$$\psi_{X,Y}(a\lambda_1+(1-a)\lambda_2)=v((a\lambda_1+(1-a)\lambda_2)X+(1-(a\lambda_1+(1-a)\lambda_2))Y), \quad (4.24)$$

$$a\psi_{X,Y}(\lambda_1)+(1-a)\psi_{X,Y}(\lambda_2)=av(\lambda_1 X+(1-\lambda_1)Y)+(1-a)v(\lambda_2 X+(1-\lambda_2)Y), \quad (4.25)$$

したがって、不等式（4.23）は次の不等式と同値である。

$$\begin{aligned} & v((a\lambda_1+(1-a)\lambda_2)X+(1-(a\lambda_1+(1-a)\lambda_2))Y) \\ \geqq \ & av(\lambda_1 X+(1-\lambda_1)Y))+(1-a)v(\lambda_2 X+(1-\lambda_2)Y). \end{aligned} \quad (4.26)$$

次の自明な等式

$$\begin{aligned} & a(\lambda_1 X+(1-\lambda_1)Y)+(1-a)(\lambda_2 X+(1-\lambda_2)Y) \\ = \ & (a\lambda_1+(1-a)\lambda_2)X+(1-(a\lambda_1+(1-a)\lambda_2))Y \end{aligned} \quad (4.27)$$

と v の凹性より

$$\begin{aligned} & v((a\lambda_1+(1-a)\lambda_2)X+(1-(a\lambda_1+(1-a)\lambda_2))Y) \\ = \ & v(a(\lambda_1 X+(1-\lambda_1)Y)+(1-a)(\lambda_2 X+(1-\lambda_2)Y)) \\ \geqq \ & av(\lambda_1 X+(1-\lambda_1)Y))+(1-a)v(\lambda_2 X+(1-\lambda_2)Y). \end{aligned} \quad (4.28)$$

を得る。これで（4.26）が示せたので、定理が証明された。 □

4.3.2　規模に対する凹性と最適規模

上の定理 4.4 の特別な場合として $Y=0$ とおいて、次の結果を得る。

系 4.1 凹マネタリ価値尺度 $v(X)$ に対して $\psi_X(\lambda)=v(\lambda X)$ は λ の凹関数であり $\psi_X(0)=0$ である。

この結果より、最適な規模を議論できる可能性が出てくる。

[最適規模（**Optimal scale**）]

あるリターン X に対して $v(X)>0$ で $v(\lambda X)$ は上に有界とする。このとき $v(\lambda X)$ を最大にする λ の値（最適規模=optimal scale）が存在する可能性がある。この事実から実務的な応用が多く生まれる。それらの具体的な応用事例は次章以下で述べる。

4.4　相互補完関係

2 つのプロジェクト X と Y に対して、 $v(X), v(Y)$ と $v(X+Y)$ との関係について考察する。

凹マネタリ価値尺度 $v(X)$ に対して、一般には X と Y の選び方によって $v(X+Y)<v(X)+v(Y)$, $v(X+Y)=v(X)+v(Y)$, $v(X+Y)>v(X)+v(Y)$ のすべての場合が起こりうる。この関係は、X と Y との相互補完関係を表していると言える。

定義 4.5 (相互補完)
(1) $v(X+Y) > v(X) + v(Y)$ のとき、 X と Y の間に相互補完関係が有ると言う。
(2) $v(X+Y) < v(X) + v(Y)$ のとき、 X と Y の間に負の相互補完関係が有ると言う。
(3) $v(X+Y) = v(X) + v(Y)$ のとき、 X と Y の間に相互補完関係は無いと言う。

注 4.8 $v(X)$ がコヒーレントの性質を持っている場合には、

$$v(X+Y) \geqq v(X) + v(Y) \tag{4.29}$$

が成立している。

（証明）　次のような関係が言える。

$$v(X+Y) = 2v\left(\frac{1}{2}X + \frac{1}{2}Y\right) \geqq 2\left(\frac{1}{2}v(X) + \frac{1}{2}v(Y)\right) = v(X) + v(Y) \tag{4.30}$$

相互補完関係を考察するために、次の「条件付き付加価値」の概念を導入する。

定義 4.6　次式で定義される $v(Y|X)$

$$v(Y|X) = v(X+Y) - v(X)$$

を、 <u>X を前提</u> としたときの Y の <u>付加価値</u> と呼ぶ。

注 4.9 効用無差別価格による Y の付加価値は

$$E[u(X+Y-p)] = E[u(X)]$$

を満たす p である。

$u(x) = u_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha}\left(1 - e^{-\alpha x}\right)$ の場合（すなわち、*RSVM* の場合）には、上の $v(Y|X)$ はこの p と一致する。

定理 4.5 付加価値 $v(Y|X)$ は X を固定したとき Y の関数として凹マネタリ価値尺度になっている。

（証明）凹マネタリ価値尺度の定義を満たすことは、容易に確かめられる。（証明終わり）

4.5　独立加法性

ここで特に X と Y が独立な場合を取り上げてみる。その場合には、価値尺度の持つべき性質としては $v(X+Y) = v(X) + v(Y)$ が成立することが自然なことと考えられる。そこで、次の定義を導入する。

定義 4.7 (Independence-Additivity　独立加法性) 価値尺度 $v(x)$ が次の条件

e) (independence-additivity): X と Y とが独立なとき、$v(X+Y) = v(X) + v(Y)$

を満たすとき、$v(x)$ は独立加法性（*independence-additivity*）を持つという。

次の定理は容易に示せる。（§5.3 を参照せよ。）

定理 4.6 指数型効用関数から定まる効用無差別価値は独立加法性（*independence-additivity*）を持っている。

実は、この定理の逆にあたる次の定理が知られている。

定理 4.7 凹型の効用関数 $u(x)$ が $C^{(2)}$-級で、$u(0) = 0$、$u'(0) = 1$、$u''(0) = -\alpha$ このとき、この効用関数 $u(x)$ から定まる効用無差別価値 $v(X)$ が独立加法性を持っていた とすると、$u(x)$ は次の形である。

$$u(x) = \frac{1}{\alpha}\left(1 - e^{-\alpha x}\right)$$

（証明）[34, p.92, Theorem 3.2.8] を参照せよ。

注 4.10 独立加法性の定義式を一見したところ、この式は二つのプロジェクトを同時に行う場合の相乗効果を否定している式のように誤解される恐れがある。しかしこの式は相乗効果の議論とは全く別のことであることを注意しておきたい。いま、プロジェクト $[A]$ のリターンを X、プロジェクト $[B]$ のリターンを Y、$[A]$ と $[B]$ を合わせて行うプロジェクト $[C]$ のリターンを Z としよう。このとき、二つのプロジェクト $[A]$ と $[B]$ の間に相乗効果があるか否かの議論は、$Z = X + Y$ が成立するか否かの問題である。（相乗効果が無い場合には $Z = X + Y$ が成立する）。

相乗効果の問題との関連で見た場合、独立加法性があるとき、「二つのプロジェクト $[A]$ と $[B]$ の間に相乗効果がなく、かつプロジェクト $[A]$ のリターン X とプロジェクト $[B]$ のリターン Y とが独立な時、$[A]$ と $[B]$ を合わせて行うプロジェクト $[C]$ の価値はプロジェクト $[A]$ の価値とプロジェクト $[B]$ の価値の和になる」が言える。

4.6 適切な価値尺度の条件

ここで、上で述べてきたような理論の現状を考慮しつつ、適切な価値尺度の持つべき性質について検討しておくことにする。

4.6.1 リスクと価値がバランスよく評価できること

一般にリスクへの関心が高く、「リスク評価」とか「リスク尺度」の議論は多くなされている。しかし注意すべきこととして、「リスク評価」といった場合、資源開発や新しい事業の開始など多くの場合には価値を生み出す活動の中でのリスクを問題にしている。もちろん自然災害など、純粋にリスクのみを検討する場合もあるが、我々が問題としているのはプロジェクトの評価の問題であり、この場合にはまず価値（＝利益）を生み出すべき活動がありそれに付随してリスクも生じている。従って、リスクだけ、また生み出される価値だけを個別に評価するのでなく、リスクと価値とを総合的に評価することが肝要である。その意味で「価値尺度」という呼び方をしている。

4.6.2　規模のリスクの評価が考慮に入っていること

プロジェクト評価のための尺度と保険評価のための尺度の違い。

リスク尺度の研究は保険（アクチュアリー）の分野で盛んである。そして保険の場合、coherent の性質を持つことが要請されている。

これにたいしてプロジェクト評価の場合には、coherent では無い convex risk measure が必要なものであると考えられる。その理由は、プロジェクトの採用に対する判断は企業の規模などの要因を反映しており、リスクに対する態度も規模に対する一様性は成立しないと考えるほうが自然だからである。

この意味で、プロジェクトの評価のためのリスク尺度としては、「効用無差別価格」から定まるリスク尺度（convex risk measure）が、上で見た候補の中では、もっとも適切なものであるといえる。（「効用無差別価格」から定まるリスク尺度、については [20] を参照。）

4.6.3　独立加法性を持つこと

２つの独立なプロジェクト X と Y に対して $v(X+Y)=v(X)+v(Y)$ が成立することは、自然な要請であろう。

4.6.4　相互補完関係が議論できること

プロジェクトの総合的な評価にあたっては、複数のプロジェクトポートフォリオの評価が必要であり、戦略を考えるためには相互補完関係分析を数量的に行なえることが必要である。

4.6.5　適切な価値尺度の特定

凹マネタリ価値尺度の定義自身が価値尺度の持つべき最低限度の性質を述べたものになっている。したがって、採用すべき価値尺度を検討する場合には、凹マネタリ価値尺度の性質を持つものの中で探すことになる。さらにその中で、ここまで述べてきたような適切な価値尺度が満たすべき条件をすべて満たしているようなものを探すべきこととなる。

この問題を「効用無差別価値尺度」のクラスの中で特定することにした場合、その解答として、次章で述べる「リスク鋭感的価値尺度」が得られる。これについては第５章で述べる。

4.7　凹マネタリ価値尺度の動学化とプロジェクトの評価

4.7.1　リアルオプション・アプローチとの整合性

プロジェクトの推進過程でなされうる選択としては、リアルオプションとして定式化されるもの（延期オプション、拡大オプション、縮小オプション、撤退オプション、など）がある。これらのオプションの最適な利用を考慮に入れた評価法を、<u>リアルオプション・アプローチ</u>

と呼ぶことにする。これらのオプションは、プロジェクト推進上の戦略またはコントロールとして理解でき、確率的最適制御の問題として定式化することができる。

確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ と情報の空間（フィルトレーション）$\{\mathcal{F}_t, t = 0, 1, 2, \cdots\}$ が与えられておるものとする。 いま戦略過程を $\Phi = \{\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_T\}$, $\phi_t : \mathcal{F}_t$-predictable、で表し、これにより定まるキャッシュフローを $\mathbf{C}^{(\Phi)} = \{C_0^{(\Phi)}, C_1^{(\Phi)}, \cdots, C_T^{(\Phi)}\}$ で表すことにする [3]。このキャッシュフローのランダム現在価値（RPV）は

$$RPV(\mathbf{C}^{(\Phi)}) = \sum_{t=0}^{T} \tilde{C}_t^{(\Phi)} = \sum_{t=0}^{T} \frac{C_t^{(\Phi)}}{(1+r)^t}$$

となり、価値尺度 $v(X)$ による評価値は

$$V^{(\Phi)} = V(\mathbf{C}^{(\Phi)}) = v(RPV(\mathbf{C}^{(\Phi)})).$$

となる。そして、確率的最適制御の解としての次の値

$$\overline{V} = \sup_{\Phi} V(\mathbf{C}^{(\Phi)})$$

が、最適戦略のもとでのプロジェクトの評価額となる。この結果として、プロジェクトの採用・非採用の判断は次のルールによってなされることになろう。

（１）$\overline{V} > 0$ ならば、プロジェクトを採用し推進する。

（２）$\overline{V} \leqq 0$ ならば、プロジェクトを棄却する。

上記の評価の過程で、評価額の計算法が分かりやすい形でなされることは実用上重要である。すなわち、確率的最 適制御理論で使われる手法がうまく適用できることが望ましい。そのためには、問題を動学化して扱うことが必要となる。

4.7.2 動学的価値尺度と時間的整合性

上で見たように、プロジェクトの推進過程における戦略の選択は時間の経過とともになされる。従って、プロジェクトの価値評価は時間経過とともに各時点ごとになされる必要がある。そのために次のような動学的価値尺度が導入されている。

定義 4.8 (動学的凹マネタリ価値尺度) 各時点 $t,\ t = 0, 1, 2, \cdots, T,$ ごとに凹マネタリ価値尺度（*a concave monetary value measure*） $v_t(X) : L(\mathcal{F}_T) \to L(\mathcal{F}_t)$ が定義されているとき、その全体 $\{v_t(X), t = 0, 1, 2, \cdots, T\}$ を動学的凹マネタリ価値尺度（*dynamic concave monetary value measure*）と呼ぶ。

この動学的価値尺度による価値評価が適切な評価法であるための要請として、時間的整合性の問題がある。すなわち、プロジェクトの推進過程における戦略の選択は時間の経過とともになされるので、各時点での価値評価が統一的な基準で整合性を持ってなされることが望ましい。上に導入した動学的マネタリ価値尺度がそのような性質を持っているための条件として導入されているものが時間的整合性（time consistency）の概念である。これは次のように定義される。

[3] ここで、$C_0^{(\Phi)} = -I_0$（I_0 は初期投資額で所与）としている。

定義 4.9 (時間的整合性 (time-consistency)) 動学的マネタリ価値尺度 $\{v_t(X), t = 0, 1, 2, \cdots, T\}$ が次の性質

$$v_t(X) = v_t(v_{t+1}(X)), t = 0, 1, 2, \cdots, T-1, \tag{4.31}$$

を持っているとき、時間的整合性（*time-consistency*）を持っていると言う。

いま時間整合的な動学的マネタリ価値尺度が一つ与えられたとして、それを $\{v_t(X), t = 0, 1, 2, \cdots, T\}$ する。この時、 $\mathcal{F}_t$-適合的なキャッシュフロー　$\tilde{\mathbf{C}} = \{\tilde{C}_0, \tilde{C}_1, \cdots, \tilde{C}_T\}$ に対する価値評価に対して、次の関係式が成立する。

$$\begin{aligned}
v_0(RPV(\mathbf{C})) &= v_0\left(\sum_{s=0}^{T} \tilde{C}_s\right) = \tilde{C}_0 + v_0\left(\sum_{s=1}^{T} \tilde{C}_s\right) \\
&= \tilde{C}_0 + v_0\left(v_1(\sum_{s=1}^{T} \tilde{C}_s)\right) = \tilde{C}_0 + v_0\left(v_1\left(\tilde{C}_1 + \sum_{s=2}^{T} \tilde{C}_s\right)\right) \\
&= \tilde{C}_0 + v_0\left(\tilde{C}_1 + v_1\left(\sum_{s=2}^{T} \tilde{C}_s\right)\right), \qquad (4.32)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_1\left(\sum_{s=2}^{T} \tilde{C}_s\right) &= v_1\left(v_2(\sum_{s=2}^{T} \tilde{C}_s)\right) = v_1\left(v_2\left(\tilde{C}_{t+1} + \sum_{s=3}^{T} \tilde{C}_s\right)\right) \\
&= v_1\left(\tilde{C}_2 + v_2\left(\sum_{s=3}^{T} \tilde{C}_s\right)\right). \qquad (4.33)
\end{aligned}$$

同様にして

$$\begin{aligned}
v_t(\sum_{s=t+1}^{T} \tilde{C}_s) &= v_t\left(v_{t+1}\left(\sum_{s=t+1}^{T} \tilde{C}_s\right)\right) = v_t\left(v_{t+1}\left(\tilde{C}_{t+1} + \sum_{s=t+2}^{T} \tilde{C}_s\right)\right) \\
&= v_t\left(\tilde{C}_{t+1} + v_{t+1}\left(\sum_{s=t+2}^{T} \tilde{C}_s\right)\right) \qquad (4.34)
\end{aligned}$$

を得る。ここで $V_t = \tilde{C}_t + v_t\left(\sum_{s=t+1}^{T} \tilde{C}_s\right)$ と置くと、次式が得られる。

$$\begin{aligned}
V_t &= \tilde{C}_t + v_t\left(\tilde{C}_{t+1} + v_{t+1}\left(\sum_{s=t+2}^{T} \tilde{C}_s\right)\right) \\
&= \tilde{C}_t + v_t(V_{t+1}), \qquad t = 0, 1, \cdots, T-1, \qquad (4.35) \\
V_T &= \tilde{C}_T. \qquad (4.36)
\end{aligned}$$

この関係式により、$\{V_t; t = T-1, T-2, \cdots, 0\}$ を最終時点から再帰的に求めることができ、最終的に

$$V_0 = \tilde{C}_0 + v_0(V_1) = v_0\left(\sum_{s=0}^{T} \tilde{C}_s\right) = v_0(RPV(\mathbf{C})) \tag{4.37}$$

が求まる。

4.7.3 再帰的評価とベルマン方程式

上で時間整合的な動学的マネタリ価値尺度に対して行った考察を戦略（コントロール）を入れた場合に行うことにより、次のような結果が得られる。

いま $\mathcal{F}_t$-可予測な戦略 $\Phi = \{\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_T\}$ のクラスがあり、各戦略 Φ に対して得られるキャッシュフローを

$$\tilde{\mathbf{C}} = \{\tilde{C}_0, \tilde{C}_1^{(\Phi)}, \cdots, \tilde{C}_T^{(\Phi)}\},$$

とする。ここで $\tilde{C}_0 = C_0 = -I_0$ は所与としている。このとき、時間整合的な動学的マネタリ価値尺度 $\{v_t(X), t = 0, 1, 2, \cdots, T\}$ による最適戦略によるキャッシュフローの評価額は次のように計算される。

$$\begin{aligned}
\overline{V} &= \sup_{\Phi} \left\{ v_0 \left(RPV(C^{(\Phi)}) \right) \right\} = \sup_{\Phi} \left\{ \tilde{C}_0 + v_0 \left(\sum_{t=1}^{T} \tilde{C}_t^{(\Phi)} \right) \right\} \\
&= \tilde{C}_0 + \sup_{\phi_1, \cdots, \phi_T} \left\{ v_0 \left(v_1 \left(\sum_{t=1}^{T} \tilde{C}_t^{(\Phi)} \right) \right) \right\} \\
&= \tilde{C}_0 + \sup_{\phi_1, \cdots, \phi_T} \left\{ v_0 \left(\tilde{C}_1^{(\Phi)} + v_1 \left(\sum_{t=2}^{T} \tilde{C}_t^{(\Phi)} \right) \right) \right\} \\
&= \tilde{C}_0 + \sup_{\phi_1} \left\{ v_0 \left(\tilde{C}_1^{(\Phi)} + \sup_{\phi_2, \cdots, \phi_T} \left\{ v_1 \left(\sum_{t=2}^{T} \tilde{C}_t^{(\Phi)} \right) \right\} \right) \right\} \\
&= \cdots \\
&= \tilde{C}_0 + \sup_{\phi_1} \left\{ v_0 \left(\tilde{C}_1^{(\Phi)} + \sup_{\phi_2} \left\{ v_1 \left(\tilde{C}_2^{(\Phi)} + \cdots \right.\right.\right.\right. \\
&\qquad \left.\left.\left.\left. \cdots + \sup_{\phi_{T-1}} \left\{ v_{T-2} \left(\tilde{C}_{T-1}^{(\Phi)} + \sup_{\phi_T} \left\{ v_{T-1} \left(\tilde{C}_T^{(\Phi)} \right) \right\} \right) \right\} \cdots \right) \right\} \right) \right\}. \qquad (4.38)
\end{aligned}$$

この公式はベルマン方程式の形をしており、時間的に逆向きの再帰方程式になっている。そして、この値を実現する戦略 Φ^* が最適な戦略である。この値 $\overline{V}$ を求めるには、$\{\overline{V}_t^{(\Phi)},\ t = T, T-1, \cdots, 0\}$ を次のように再帰的に計算する。

$$\overline{V}_T^{(\Phi)} = \tilde{C}_T^{(\Phi)}, \qquad (4.39)$$

$$\overline{V}_{T-1}^{(\Phi)} = \tilde{C}_{T-1}^{(\Phi)} + \sup_{\phi_T} v_{T-1} \left(\overline{V}_T^{(\Phi)} \right), \qquad (4.40)$$

$$\cdots$$

$$\overline{V}_t^{(\Phi)} = \tilde{C}_t^{(\Phi)} + \sup_{\phi_{t+1}} v_t \left(\overline{V}_{t+1}^{(\Phi)} \right), \qquad (4.41)$$

$$\cdots$$

$$\overline{V}_0^{(\Phi)} = \tilde{C}_0^{(\Phi)} + \sup_{\phi_1} v_0 \left(\overline{V}_1^{(\Phi)} \right). \qquad (4.42)$$

ここで $\overline{V}_t^{(\Phi)}$ は $\{\phi_1, \cdots, \phi_t\}$ に依存して決まる $\mathcal{F}_t$-可測な確率変数になっている。

こうして得られた $\overline{V}_0^{(\Phi)}$ が、初期投資額を指定した上で最適戦略を採用した場合のプロジェクトの価値 $\overline{V}$ である。

- RSVM の動学化については、第 7 章および第 8 章で詳しく見る。

第5章　リスク鋭感的価値尺度

前章で価値尺度の持つべき性質について検討した。それらの性質を全て満たす価値尺度として、「リスク鋭感的価値尺度」（RSVM）がある。本章では「リスク鋭感的価値尺度」の概要を説明する。（詳細については [22] を参照せよ。）

5.1　リスク鋭感的価値尺度の定義

第4章で、凹マネタリ価値尺度の定義を与え、プロジェクト評価のための価値尺度はこの定義に当てはまっているものが望ましいものであることを説明した。さらに、凹マネタリ価値尺度を構成する方法として効用関数に基づいた効用無差別価格による構成法があることを述べた。

効用関数として指数型効用関数を採用した場合に得られる効用無差別価格について、次の結果が得られる。

定理 5.1 指数型効用関数

$$u_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha}\left(1 - e^{-\alpha x}\right), \quad \alpha > 0 \tag{5.1}$$

の効用無差別価値 $v_{u_\alpha}(X)$ と確実性等価 $c_{u_\alpha}(X)$ とは一致し、次式で与えられる。

$$v_{u_\alpha}(X) = c_{u_\alpha}(X) = -\frac{1}{\alpha}\log E[e^{-\alpha X}], \quad \alpha > 0. \tag{5.2}$$

(証明）上のものが効用無差別価値であり、かつ確実性等価でもあることは、直接の計算で容易に確かめられる。 □

第4章の定理 4.1 より、上の定理の系として次のことが分かる。

系 5.1 効用無差別価値 $v_{u_\alpha}(X) = -\frac{1}{\alpha}\log E[e^{-\alpha X}]$ は凹マネタリ価値尺度である。

以上のことを踏まえて、次の「リスク鋭感的価値尺度（RSVM)」を導入する。

定義 5.1 (リスク鋭感的価値尺度（RSVM）) 次式で定まる凹マネタリ価値尺度

$$U^{(\alpha)}(X) = -\frac{1}{\alpha}\log E[e^{-\alpha X}], \quad \alpha > 0, \tag{5.3}$$

を（リスク回避度 α の）リスク鋭感的価値尺度（*RSVM*: *risk-sensitive value measure*）と呼ぶ。

注 5.1 「リスク鋭感的価値尺度」と呼ぶことにした理由は、価値評価の問題を動学化した時この価値尺度による評価法が「リスク鋭感的確率制御」の問題に帰着されることによる。

期待効用での評価とその効用関数に対応した効用無差別価値での評価とは、§３．２で見たように、必ずしも整合的にはなっていない。しかし、リスク鋭感的価値尺度（RSVM）の場合には期待効用での評価と整合的になっている。これを見ておこう。

補助定理 5.1 確実性等価による評価は期待効用による評価と整合性を持っている。すなわち

$$E[u(X)] \leqq E[u(Y)] \quad \Leftrightarrow \quad c_u(X) \leqq c_u(Y) \tag{5.4}$$

が成立する。

（証明）定義より、$c_u(X)$ は次の c についての方程式の解である。

$$u(c) = E[u(X)] \tag{5.5}$$

効用関数 $u(x)$ は単調増加関数であるので、補助定理の結論の関係は明らかである。 □

定理 5.2 *RSVM* による評価は期待効用による評価と整合性を持っている。すなわち次の関係が成立している。

$$E[u_\alpha(X)] \leqq E[u_\alpha(Y)] \quad \Leftrightarrow \quad U^{(\alpha)}(X) \leqq U^{(\alpha)}(Y) \tag{5.6}$$

（証明）定理 5.1 より $U^{(\alpha)}(X)$ は効用関数 $u_\alpha(x)$ の確実性等価であり、従って補助定理 5.1 より明らかで定理の成立が分かる。 □

注 5.2 この価値尺度を実用的に適用する場合にはリスク回避度 α をあらかじめ設定しておく必要がある。この問題については、第 9 章で議論する。

注 5.3 上のリスク鋭感的価値尺度は次のコヒーレントの性質は持っていない。

(vi) (Positive Homogeneity): $\forall\lambda \in R^+, \quad v(\lambda X) = \lambda v(X).$

この点で、保険の理論との関連が深いリスク尺度（risk measure）の議論の場合と視点が異なっている。

定理 5.3 $U^{(\alpha)}(X)$ について、次のことが言える。

（１） 次の近似式が成り立つ。

$$U^{(\alpha)}(X) = -\frac{1}{\alpha}\log E[e^{-\alpha X}] = E[X] - \frac{1}{2}\alpha V[X] + \cdots . \tag{5.7}$$

（２） 特に X がガウス型であるときには、次の等式

$$U^{(\alpha)}(X) = -\frac{1}{\alpha}\log E[e^{-\alpha X}] = E[X] - \frac{1}{2}\alpha V[X] \tag{5.8}$$

が成立する。

（証明）（１） $f(\alpha) = \log E[e^{-\alpha X}]$ と置いて、$f(\alpha)$ を $\alpha = 0$ の近傍で展開する。

$$f'(\alpha) = \frac{-E[Xe^{-\alpha X}]}{E[e^{-\alpha X}]}, \quad f''(\alpha) = \frac{E[X^2e^{-\alpha X}]E[e^{-\alpha X}] - E[Xe^{-\alpha X}]^2}{E[e^{-\alpha X}]^2} \tag{5.9}$$

より

$$f(\alpha) = f(0) + f'(0)\alpha + \frac{1}{2}f''(0)\alpha^2 + \cdots = -E[X]\alpha + \frac{1}{2}V[X]\alpha^2 + \cdots \tag{5.10}$$

となり、$U^{(\alpha)}(X) = -\frac{1}{\alpha}f(\alpha)$ に代入して結論の式が言える。

（２） 正規分布の積率母関数の形から明らかである。　(証明終わり)

注 5.4 上の (１) の意味するところは、「平均・分散分析による評価（期待値から、リスクとみなされる分散項を差し引く）はリスク鋭感的価値尺度の２次までの近似になっている」ということである。これと（２）とを合わせて、リスク鋭感的価値尺度による評価が平均・分散分析と整合的であることが分かる。

例 5.1 ３つの確率変数 X, Y, Z を考える。[1]

$$\begin{aligned}
&P(X=-10)=0.02,\quad P(X=4)=0.5,\quad P(X=8)=0.48\\
&P(Y=-2)=0.15,\quad P(Y=4)=0.7,\quad P(Y=10)=0.15\\
&P(Z=-1)=0.3,\quad P(Z=4)=0.6,\quad P(Z=16)=0.1\\
&\quad E[X]=5.64,\quad V[X]=8.9104,\\
&\quad E[Y]=4.00,\quad V[Y]=10.8000,\\
&\quad E[Z]=3.70,\quad V[Z]=21.8100.
\end{aligned}$$

リスク鋭感的価値尺度の特徴を大雑把に把握するために、上の例に関して、$U^{(\alpha)}(X)$ の α の関数としての特徴を見れるように数値データの表を提示しておこう。

alpha	MV_X	RSV_X	MV_Y	RSV_Y	MV_Z	RSV_Z
0.010000	5.595448	5.594199	3.946000	3.945998	3.590950	3.593490
0.060000	5.372688	5.319033	3.676000	3.675662	3.045700	3.129266
0.110000	5.149928	4.933318	3.406000	3.404087	2.500450	2.755645
0.160000	4.927168	4.380295	3.136000	3.130900	1.955200	2.445792
0.210000	4.704408	3.609163	2.866000	2.856723	1.409950	2.180532
0.260000	4.481648	2.620310	2.596000	2.583280	0.864700	1.947365
0.310000	4.258888	1.496342	2.326000	2.313228	0.319450	1.738554
0.360000	4.036128	0.363397	2.056000	2.049745	-0.225800	1.549428
0.410000	3.813368	-0.680580	1.786000	1.796035	-0.771050	1.377127
0.460000	3.590608	-1.593360	1.516000	1.554875	-1.316300	1.219801
0.510000	3.367848	-2.372598	1.246000	1.328321	-1.861550	1.076110
0.560000	3.145088	-3.033511	0.976000	1.117599	-2.406800	0.944959
0.610000	2.922328	-3.595507	0.706000	0.923155	-2.952050	0.825355
0.660000	2.699568	-4.076616	0.436000	0.744791	-3.497300	0.716358
0.710000	2.476808	-4.491900	0.166000	0.581844	-4.042550	0.617058
0.760000	2.254048	-4.853425	-0.104000	0.433351	-4.587800	0.526582

[1] この例を１つの典型的な例として、以下でもしばしば説明に使用する。

0.810000	2.031288	-5.170723	-0.374000	0.298187	-5.133050	0.444100
0.860000	1.808528	-5.451313	-0.644000	0.175170	-5.678300	0.368834
0.910000	1.585768	-5.701156	-0.914000	0.063128	-6.223550	0.300064
0.960000	1.363008	-5.925015	-1.184000	-0.039050	-6.768800	0.237133

この表から、次のようなことが読み取れる。
１．MV と RSV の値は α が小のときには近いが、α が大きくなるにつれその差は開いていく。
２．MV と RSV の値の差は、分布により異なる。対称な分布（Y）の場合には差は小さく、非対称な分布（X,Z）の場合には差が大きい。
３．MV で評価した場合、α の値が大きくなっても評価の順位は変わらない。このことから、MV での評価の場合には分布に歪みがあっても評価への影響は無いと言える。
４．一方、RSV で評価した場合には、α の値が大きくなった場合には評価の順位に変動が起こる。このことから、分布の歪みが評価に入っていることが分かる。α の値が大きくなるにつれ、左に裾が伸びている分布の場合には評価は低くなり、右に裾が伸びている分布の場合には評価は高めとなっている。

5.2　規模のリスクが考慮された尺度であること

前章で検討したように、価値尺度は規模のリスクが考慮に入っており、さらに最適な規模についての議論ができることが望ましい。この点について RSVM の性質を見ておこう。

定理 5.4 確率変数 X が積率母関数を持ち、次の条件

$$E[X] > 0, \quad P(X < 0) > 0,$$

を満たしているものとする。この時次のことが言える。
（１） $0 < \lambda$ で λ が小のとき $U^{(\alpha)}(\lambda X) > 0$ で、$\lambda \to \infty$ のとき次式が成立する。

$$\lim_{\lambda \to \infty} U^{(\alpha)}(\lambda X) = -\infty. \tag{5.11}$$

（２） $U^{(\alpha)}(\lambda X)$ の最大値を与える λ の値 λ_{opt} が定まり、λ_{opt} はリスク回避度 α の関数として次のように表現される。

$$\lambda_{opt} = \frac{C_X}{\alpha}, \quad \alpha > 0. \tag{5.12}$$

ここで C_X は $E\left[Xe^{-C_X X}\right] = 0$ の解である。

(証明)　（１）　$g(\lambda) = U^{(\alpha)}(\lambda X)$ と置く。λ で微分して、

$$g'(\lambda) = -\frac{1}{\alpha}\frac{E[-\alpha X e^{-\alpha\lambda X}]}{E[e^{-\alpha\lambda X}]} = \frac{E[Xe^{-\alpha\lambda X}]}{E[e^{-\alpha\lambda X}]}, \quad g'(0) = E[X] > 0. \tag{5.13}$$

$g(0) = U^{(\alpha)}(0) = 0$ に注意して、前半の部分は示された。

仮定 $P(X<0)>0$ より、$a>0$ と $\delta>0$ を $P(X<-a)>\delta$ に取れる。このとき

$$E[e^{-\alpha\lambda X}]=E[e^{-\alpha\lambda X}1_{X<-a}]+E[e^{-\alpha\lambda X}1_{X\geqq -a}]>e^{\alpha\lambda a}\delta \tag{5.14}$$

したがって、

$$U^{(\alpha)}(\lambda X)=-\frac{1}{\alpha}\log E[e^{-\alpha\lambda X}]<-\frac{1}{\alpha}(\alpha\lambda a+\log\delta)\to-\infty\ (as\ \lambda\to\infty). \tag{5.15}$$

これで（１）が示せた。
（２） $U^{(\alpha)}(X)$ は 凹マネタリ価値尺度であるので、定理４．４ (大域的凹性）により $U^{(\alpha)}(\lambda X)$ は λ の凹関数である。このことと（１）の結果から、最大値の存在がわかる。その点を λ_{opt} とすると $\frac{\partial}{\partial\lambda}U^{(\alpha)}(\lambda_{opt}X)=0$ となるので、(5.13) より

$$E[Xe^{-\alpha\lambda_{opt}X}]=0 \tag{5.16}$$

を得る。これより（２）の結論が得られる。 □

注 5.5 この定理の (2) における方程式 $\frac{\partial}{\partial\lambda}U^{(\alpha)}(\lambda_{opt}X)=0$ より

$$\frac{E[(\lambda_{opt}X)e^{-\alpha(\lambda_{opt}X)}]}{E[e^{-\alpha(\lambda_{opt}X)}]}=\lambda_{opt}\frac{\partial}{\partial\lambda}U^{(\alpha)}(\lambda_{opt}X)=0 \tag{5.17}$$

であるので、$\lambda_{opt}X$ は *Essher* 変換値が 0 となるような規模ということになる。

注 5.6 規模のリスクに関しては、第 6 章でさらに詳しく検討する。

5.3 独立加法性を持つこと

RSVM の独立加法性については、次のことが言える。

定理 5.5 (RSVM の独立加法性) リスク鋭感的価値尺度 $U^{(\alpha)}(X)$ は独立加法性を持つ。すなわち、 X と Y が独立なとき、次の等式が成り立つ。

$$U^{(\alpha)}(X+Y)=U^{(\alpha)}(X)+U^{(\alpha)}(Y). \tag{5.18}$$

（証明） X と Y が独立とすると、次の等式が成り立つ。

$$\begin{aligned} U^{(\alpha)}(X+Y) &= -\frac{1}{\alpha}\log E[e^{-\alpha(X+Y)}]=-\frac{1}{\alpha}\log E[e^{-\alpha X}]E[e^{-\alpha Y}] && (5.19)\\ &= -\frac{1}{\alpha}\left(\log E[e^{-\alpha X}]+\log E[e^{-\alpha Y}]\right) && (5.20)\\ &= U^{(\alpha)}(X)+U^{(\alpha)}(Y). && (5.21)\end{aligned}$$

これで証明された。 □

実はこの定理のほぼ逆のこと、すなわち、「効用無差別価格が独立加法性を持つような効用関数は、適当な制約条件の下では、指数型効用関数に限られる」ことが知られている。

定理 5.6 効用関数 $u(x)$ が $C^{(2)}$-*class* で、 $u(0)=0$、$u'(0)=1$、$u''(0)=-\alpha$、($\alpha>0$) を満たしているものとする。このとき、$u(x)$ から定まる凹マネタリ価値尺度が独立加法性を持っているならば、$u(x)$ は次の関数である。

$$u(x)=\frac{1}{\alpha}\left(1-e^{-\alpha x}\right) \tag{5.22}$$

（証明）文献 [34, p.92, Theorem 3.2.8] を見よ。

5.4 相互補完関係の議論の可能性

前章の定義（4.5）で導入した相互補完関係との関連を見ておこう。分かりやすい場合として、(X,Y) が正規分布している場合を考察する。このとき、定理５．１（２）より次のことが分かる。

定理 5.7 (X,Y) が正規分布しているとき,

$$U^{(\alpha)}(X+Y)=U^{(\alpha)}(X)+U^{(\alpha)}(Y)-\alpha Cov(X,Y) \tag{5.23}$$

が成り立つ。

(証明)　定理５．１（２）より

$$\begin{aligned} U^{(\alpha)}(X+Y) &= E[X+Y]-\frac{1}{2}\alpha V[X+Y] && (5.24)\\ &= E[X]+E[Y]-\frac{1}{2}\alpha(V[X]+2Cov(X,Y)+V[Y]) && (5.25)\\ &= U^{(\alpha)}(X)+U^{(\alpha)}(Y)-\alpha Cov(X,Y) && (5.26)\end{aligned}$$

となる。 □

この結果から、(X,Y) が正規分布している場合、負の共分散を持つ時には相互補完関係が有り、正の共分散を持つ時には負の相互補完関係が有ることになり、相互補完関係の３つの場合が起こりうることが分かる。　(X,Y) が正規分布でない場合でも、近似的には上の関係式が言えているので、相互補完関係の３つの場合が起こりうることになる。

こうして、$U^{(\alpha)}(X)$ により相互補完関係の議論が可能であることが分かった。

5.5 リスク鋭感的価値尺度の優れた点とその唯一性

今まで見てきたことから、リスク鋭感的価値尺度が次のような特徴を持っていることが分かる。

１．<u>指数型効用関数</u> の <u>効用無差別価値</u> である。それと同時に、<u>確実性等価</u> でもある（定理 5.1)。したがって、その両者の性質を併せ持っている。

２．<u>凹マネタリ価値尺度</u> の性質を持っている（定理 4.1)。

３．期待効用による評価と整合性がある（定理 5.2)。

４．<u>規模に対する最適性</u> を議論できる（定理 5.4、第 6 章)。

5．独立加法性 を持っている。効用無差別価格の中でこの性質を持つものは、RSVM のみである（定理 5.5)。

6．分布全体を考慮した上での、risk sensitive な価値尺度である。（リスクへの態度は、パラメーター α に入っている。）

これらの性質は、望ましい価値尺度が持って欲しいと我々が期待していた性質である (§4.6 参照)。リスク鋭感的価がこれらの性質を持っていることを見てきたが、同時に次のことを強調しておきたい。上の性質５に注意すれば、「効用無差別価値として定まる凹マネタリ価値尺度の中で、上に述べた性質をすべて備えているものは［リスク鋭感的価値尺度］のみである。」と言える。すなわち、**『[リスク鋭感的価値尺度] こそが、我々が必要としている唯一の価値尺度である』**ということである。

5.6 エッシャー変換値についての考察

前章の §4.2.3 の 7') において、「限界効用による重みづけ期待値」を取り上げ、例の 4.2 で、指数型効用関数の場合の限界効用による重みづけ期待値として定まるエッシャー変換値を見た。

定義 5.2 次式で定義される $ESS^{(\alpha)}(X)$

$$ESS^{(\alpha)}(X) = \frac{E[Xe^{-\frac{1}{2}\alpha X}]}{E[e^{-\frac{1}{2}\alpha X}]}. \tag{5.27}$$

を、リスク回避度 α の エッシャー変換値（*Esscher transformed value*）とよぶ。

注 5.7 リスク回避度のパラメーター α に対して指数を $\frac{1}{2}\alpha$ にしているのは、次の定理が成立することより、リスク鋭感的価値尺度のリスク回避度のパラメーター α との整合性を取るためである。

$ESS^{(\alpha)}(X)$ に対して、$U^{(\alpha)}(X)$ が持っていたのと同様の次の性質が言える。

定理 5.8 $ESS^{(\alpha)}(X)$ について、次のことが言える。
（１） 次の近似式が成り立つ。

$$ESS^{(\alpha)}(X) = \frac{E[Xe^{-\frac{1}{2}\alpha X}]}{E[e^{-\frac{1}{2}\alpha X}]} = E[X] - \frac{1}{2}\alpha V[X] + \cdots . \tag{5.28}$$

（２） 特に X がガウス型であるときには、次の等式

$$ESS^{(\alpha)}(X) = \frac{E[Xe^{-\frac{1}{2}\alpha X}]}{E[e^{-\frac{1}{2}\alpha X}]} = E[X] - \frac{1}{2}\alpha V[X] \tag{5.29}$$

が成立する。

注 5.8 この定理の（１）より、数値計算としては、$ESS^{(\alpha)}(X)$ と $U^{(\alpha)}(X)$ が近いものになるであろうことが予想される。数値例については §*6.1* を見よ。また（２）からは、平均分散分析と整合的であることが分かる。

上で見たように、$ESS^{(\alpha)}(X)$ による評価値は $U^{(\alpha)}(X)$ による評価値と近いことが予想され、計算法としては簡単な場合も多いという利点がある。ただし、次のような欠点もある。

1．凹マネタリ価値尺度にはなっていない。

2．動学的に見たとき時間整合性が無いので、リアルオプション・アプローチによる最適コントロールの問題として議論しようとする場合には、計算が容易でなくなる。

$ESS^{(\alpha)}(X)$ と $U^{(\alpha)}(X)$ の α の関数としての数値表を提示しておこう。

$Mean_x = 5.640000$ $Mean_y = 4.000000$ $Mean_z = 3.700000$ $Var_x = 8.910400$ $Var_y = 10.800000$ $Var_z = 21.810000$

lambda = 1.000000

alpha	ESS_x	RSV_x	ESS_y	RSV_y	ESS_z	RSV_z
0.010000	5.594522	5.594199	3.945999	3.945998	3.592866	3.593490
0.060000	5.335275	5.319033	3.675827	3.675662	3.110749	3.129266
0.160000	4.589161	4.380295	3.132982	3.130900	2.362308	2.445792
0.210000	4.048477	3.609163	2.859649	2.856723	2.066669	2.180532
0.260000	3.354493	2.620310	2.585050	2.583280	1.807811	1.947365
0.310000	2.479218	1.496342	2.309612	2.313228	1.577191	1.738554
0.360000	1.408462	0.363397	2.034132	2.049745	1.368476	1.549428
0.410000	0.153977	-0.680580	1.759761	1.796035	1.177130	1.377127
0.460000	-1.237831	-1.593360	1.487960	1.554875	1.000014	1.219801
0.510000	-2.688006	-2.372598	1.220420	1.328321	0.835018	1.076110
0.560000	-4.101333	-3.033511	0.958967	1.117599	0.680766	0.944959
0.610000	-5.390865	-3.595507	0.705456	0.923155	0.536379	0.825355
0.660000	-6.498240	-4.076616	0.461663	0.744791	0.401297	0.716358
0.710000	-7.400757	-4.491900	0.229183	0.581844	0.275147	0.617058
0.760000	-8.105622	-4.853425	0.009360	0.433351	0.157653	0.526582
0.810000	-8.638168	-5.170723	-0.196774	0.298187	0.048569	0.444100
0.860000	-9.030665	-5.451313	-0.388519	0.175170	-0.052352	0.368834
0.910000	-9.314793	-5.701156	-0.565514	0.063128	-0.145382	0.300064
0.960000	-9.517885	-5.925015	-0.727713	-0.039050	-0.230829	0.237133

この表から、ESS と RSV とはかなり近い評価になっていることが読み取れる。

第6章　リスク鋭感的価値尺度を使った種々の議論

6.1　規模のリスクとその評価

6.1.1　規模のリスクとは？

資産の評価やリスクの管理に関する問の多くは、不確実性を持ったキャッシュフローの価値評価の問題に帰着される。もしもキャッシュフローが効率的な市場における資産（原資産）に付随して生じているものであれば、数理ファイナンスの標準的な理論である[裁定理論]（無裁定市場を前提にした理論）を適用することができる[1]。

しかしながら、この［裁定理論］を適用するための前提条件が成立していないような資産の評価をする必要がしばしば生じる。不動産、保険、リアルオプション、知財、研究開発、新規プロジェクト、天候デリバティブ、などの評価はこれに当たる。すなわち、「裁定理論を適用できないような状況にある資産およびキャッシュフローの、リスクと価値をバランスよく評価できる評価法」を構築することが現代的な課題の1つである。

特に最近問題になるリスクとして、生起確率は小さいが非常に大きな損失を伴うリスクが存在する場合のリスク評価が重要になっている。この場合には、損失と利得のバランスとともに投資規模が問題となる。すなわち、平均的には高収益が見込まれる投資対象でもその一方で非常に大きな損失を生じる可能性が多少ともある場合には投資規模を適切な大きさに抑制しておくことが必要であり、さもないと破産につながるようなリスクに遭遇する可能性が生じる。小規模の投資であれば高収益を期待できリスクもさして問題でないプロジェクトや資産であっても、その規模（=投資額）が巨大になった場合には非常に大きなリスクが顕在化しかねない。このようなリスクを「規模のリスク」と呼ぶことにしよう。

「規模のリスク」が顕在化する規模の大きさは、個人や企業によって異なるものであることを注意しておきたい。

例 6.1 (数値例による説明) ある資産（または事業）への1単位の出資額を $I = 10$、リターンを R、損益を $X = R - I$ とし、X の分布が次のように与えられているものとする。（単位は万円。）

$$P(X = -10) = 0.02, \quad P(X = 4) = 0.5, \quad P(X = 8) = 0.48$$

$$E[X] = 5.64, \quad V[X] = 8.910400$$

[1] [6]、[24] などを参照せよ。

このとき、A、B 二人の投資家（または企業）がいたとし、それぞれ自由になる資金が次のようであったとする。

$$A : 100 \text{ 万円、} \qquad B : 1,000 \text{ 万円}$$

このとき、*10* 万円の損失になるリスクはあるがその確率は小さく、平均収益は高いので、仮にリスクが顕在化しても手持ちの *100* 万円ないしは *1,000* 万円のうちの *10* 万円なら許容範囲と考え、投資する可能性は高いだろう。しかし、有利な投資に見えるからと言って、*100* 万円投資する場合には少し事情が変わってくる。A にとって *100* 万円を失うことは破産状態になることを意味し、そのようなリスクを冒すことは避けるであろう。一方、B にとっては、*100* 万円の損失はまだ許容範囲であり投資してもよいと判断する可能性は十分考えられる。

この場合の A には、*10* 万円の投資の場合と *100* 万円の投資の場合で判断に差が生じている。この違いは、確率は小さいが大きな損害になるリスクがある場合、投資規模によって評価が変わることを意味している。すなわち、上のような投資対象の場合、投資規模が大きくなるときリスクを相対的に大きく評価するようになることを示している。また B も、*100* 万円なら投資してもよいと判断したとしても、さらに大きな投資には躊躇するであろう。このように、投資規模の大きさによって判断に変化を生じさせる要因を「規模のリスク」と呼ぶことにする。

リスクと収益とをバランスよく総合的に評価し得る 1 つの評価法として、筆者は「リスク鋭感的価値尺度（RSVM : Risk Sensitive Value Measure）」による評価法を [20], [22], [23] 等で提唱してきた [2]。この評価法は最適な投資規模を議論し得るものであり、規模のリスクの評価にも有効性を発揮し得ることが期待できる。

本章では、[25] の成果に基づき、「リスク鋭感的価値尺度（RSVM）」を「規模のリスク」への対処法という視点から検討し、RSVM が規模のリスクを評価する尺度として有効であることを示す。

注 6.1 これまでに見てきた評価法のうち、「規模のリスク」を考慮に入れた評価法になっていると言えるものには、「平均分散分析」、「期待効用」、「確実性等価」、「効用無差別価格」、「エッシャー変換値」がある。

6.1.2　規模のリスクの数値例

例 6.2 （例 *5.1* と同じもの）　3 つの確率変数 X, Y, Z を考える。

$$\begin{aligned}
&P(X=-10)=0.02,\quad P(X=4)=0.5,\quad P(X=8)=0.48\\
&P(Y=-2)=0.15,\quad P(Y=4)=0.7,\quad P(Y=10)=0.15\\
&P(Z=-1)=0.3,\quad P(Z=4)=0.6,\quad P(Z=16)=0.1\\
&\quad E[X]=5.64,\quad V[X]=8.9104,\\
&\quad E[Y]=4.00,\quad V[Y]=10.8000,\\
&\quad E[Z]=3.70,\quad V[Z]=21.8100.
\end{aligned}$$

[2] この議論と関係する他の著者による論文として、[3]、[14]、[16] などがある。

● この 3 つの分布の特徴を見ておこう。

・ X は平均的には有利な資産であるが、小確率の大きなリスクを抱えており、規模のリスクを内包している。

・ Y はバランスのとれた分布である。

・ Z は平均は低いが右に偏った分布をしており、規模のリスクは少なくむしろ規模のメリットを受ける可能性を内包している。

● このような特徴から、「規模のリスク」の視点からすると、規模が増大するとき相対的には X の評価が低くなり Z の評価は高まり Y の評価は中庸、という評価になるのが妥当と言える。

・前章で導入した「リスク鋭感的価値尺度（RSVM）」による評価が丁度そのような評価結果になっていることを、他の評価尺度と比較しつつ、数値例で見ることにする。

● 以下に数値例をあげるが、そこでの計算は次のようになされている。

・リスク回避度は $\alpha = 0.05$ としている。

・規模（サイズ）を示すパラメーター λ は $1, 2, \cdots, 20$ を動くとしている。

・平均分散分析による評価値は $MV^{(\alpha)}(X)$ などと記しており、

$$MV^{(\alpha)}(\lambda X) = E[\lambda X] - \frac{1}{2}\alpha V[\lambda X] = E[\lambda X] - \frac{1}{2}\alpha\lambda^2 V[X], \tag{6.1}$$

等で与えられる。

・リスク鋭感的価値尺度は $RSVM^{(\alpha)}(X)$ などと記しており、

$$RSVM^{(\alpha)}(\lambda X) = U^{(\alpha)}(\lambda X) = -\frac{1}{\alpha}\log\left\{E\left[e^{-\alpha(\lambda X)}\right]\right\} \tag{6.2}$$

等で与えられている。

・エッシャー変換値は $ESS^{(\alpha)}(X)$ などと記し、

$$ESS^{(\alpha)}(\lambda X) = \frac{E[\lambda X e^{-\frac{1}{2}\alpha\lambda X}]}{E[e^{-\frac{1}{2}\alpha\lambda X}]} \tag{6.3}$$

等として計算されている。

● 計算結果は以下の通りである。

$\alpha = 0.05$

λ	MV_X	$RSVM_X$	MV_Y	$RSVM_Y$	MV_Z	$RSVM_Z$
1	5.417240	5.381304	3.730000	3.729802	3.154750	3.213878
2	10.388960	10.043808	6.920000	6.917064	5.219000	5.649037
3	14.915160	13.521364	9.570000	9.556959	6.192750	7.511068
4	18.995840	15.127878	11.680000	11.646280	6.076000	8.922791
5	22.631000	14.163164	13.250000	13.188966	4.868750	9.959279
6	25.820640	10.355244	14.280000	14.200910	2.571000	10.671750
7	28.564760	4.096341	14.770000	14.712311	-0.817250	11.100837
8	30.863360	-3.853309	14.720000	14.766822	-5.296000	11.282718
9	32.716440	-12.796062	14.130000	14.417932	-10.865250	11.251235
10	34.124000	-22.268194	13.000000	13.723921	-17.525000	11.038123

11	35.086040	-32.008482	11.330000	12.742895	-25.275250	10.672577
12	35.602560	-41.881393	9.120000	11.528915	-34.116000	10.180772
13	35.673560	-51.819265	6.370000	10.129651	-44.047250	9.585588
14	35.299040	-61.788863	3.080000	8.585410	-55.069000	8.906588
15	34.479000	-71.773961	-0.750000	6.929195	-67.181250	8.160181
16	33.213440	-81.766643	-5.120000	5.187368	-80.384000	7.359922
17	31.502360	-91.763044	-10.030000	3.380592	-94.677250	6.516870
18	29.345760	-101.761270	-15.480000	1.524834	-110.061000	5.639959
19	26.743640	-111.760395	-21.470000	-0.367698	-126.535250	4.736348
20	23.696000	-121.759963	-28.000000	-2.287744	-144.100000	3.811738

$\alpha = 0.05$

λ	ESS_X	$RSVM_X$	ESS_Y	$RSVM_Y$	ESS_Z	$RSVM_Z$
1	5.391861	5.381304	3.729900	3.729802	3.200474	3.213878
2	10.160397	10.043808	6.918438	6.917064	5.562777	5.649037
3	14.045132	13.521364	9.562452	9.556959	7.280332	7.511068
4	16.671461	15.127878	11.657698	11.646280	8.490152	8.922791
5	17.535110	14.163164	13.200279	13.188966	9.285420	9.959279
6	16.018525	10.355244	14.188400	14.200910	9.728331	10.671750
7	11.467073	4.096341	14.624264	14.712311	9.860945	11.100837
8	3.342953	-3.853309	14.515845	14.766822	9.713420	11.282718
9	-8.567076	-12.796062	13.878327	14.417932	9.309713	11.251235
10	-23.978299	-22.268194	12.735003	13.723921	8.671221	11.038123
11	-42.087151	-32.008482	11.117489	12.742895	7.818848	10.672577
12	-61.754120	-41.881393	9.065230	11.528915	6.773968	10.180772
13	-81.807991	-51.819265	6.624335	10.129651	5.558654	9.585588
14	-101.312925	-61.788863	3.845878	8.585410	4.195478	8.906588
15	-119.691104	-71.773961	0.783868	6.929195	2.707065	8.160181
16	-136.702754	-81.766643	-2.506888	5.187368	1.115588	7.359922
17	-152.350613	-91.763044	-5.972835	3.380592	-0.557737	6.516870
18	-166.774460	-101.761270	-9.563431	1.524834	-2.293072	5.639959
19	-180.169809	-111.760395	-13.232543	-0.367698	-4.072276	4.736348
20	-192.737636	-121.759963	-16.939396	-2.287744	-5.879123	3.811738

6.1.3 考察

上に得られた数値例から、次のようなことが読み取れる。
（１）平均分散分析（MV）で評価するとき、リスクは分散で測られる。そのため平均が高めで分散が相対的に小さい X は規模が大きくなっても高い評価で、平均が低く分散の大きい Z は規模が大きくなるとき低い評価になる。Y の評価はその中間となっている。
（２） 規模の拡大に伴う X の評価値は、MV で見るとき高く RSVM で見るとき急激に低くなる。これは、RSVM が規模のリスクを敏感に捉えていることを示している。

（３）規模の拡大に伴う Y の評価値は、MV で見ても RSVM で見てもあまり差がない。Y の分布がバランスのとれたものであるから、その場合にはどちらの評価も妥当な評価になっていると言える。
（４）規模の拡大に伴う Z の評価値は、MV で見るとき急激に低くなり RSVM で見るとき相対的に高い評価になっている。これは、 Z の分布が正のほうに歪んでいて望ましいものであるにもかかわらず、MV では正の方への偏りもリスクとして捉えてしまっていることによる。その点、RSVM では妥当な評価になっていると言える。
（５）リスク鋭感的価値尺度（RSVM） で評価するとき、マイナスの裾があるときそのリスクを規模の増大とともにより大きなリスクとしてとらえ、プラスの裾があるときは高い方向への評価となる。
（６）エッシャー変換値（ESS）による評価値は RSVM による評価値に近い値になっている。したがって、実用的に ESS の方が使いやすい場合には RSVM の代用として ESS を使うことも考えられる。（ただし、すでに説明しているように、理論的な見地からは RSVM の方が妥当な評価尺度である。）

- 上のような状況は、RSVM が規模のリスクを取り込んだ価値尺度としての適性を持っていることを示していると言えよう。

6.2 規模のリスクへの対応

6.2.1 金融商品の利用

規模のリスクを考慮に入れた価値評価の方法が、ここまでで説明した「リスク鋭感的価値尺度（RSVM）法」により確立されたものとしよう。その上で規模のリスクへの対処法を考える。すなわち、生起確率は非常に小さい巨大リスクの回避法である。これに対しては次の３つがある。
（１）保険、または保険と同様の役割を果たしうるデリバティブの活用。
（２）適切なポートフォリオを組むことによるリスクの軽減化。
（３）リアルオプション・アプローチの導入。

これらのことを実行するに当たっては「複数の事業・投資の総合評価」が必要であり、その場合の評価尺度としても「リスク鋭感的価値尺度（RSVM）」の活用が有効である。（これについては、第１０章で改めて述べる予定である。）

ここでは、企業がある事業を計画する際に、それに伴って生じるリスクを軽減するために金融派生商品等を活用する場合の価値判断を考察する。

[保険商品によるリスクヘッジ]

例 **6.3** （数値例）
・X は前と同じものとする。

$$P(\{\omega_1\}) = 0.02,\ P(\{\omega_2\}) = 0.5,\ P(\{\omega_3\}) = 0.48$$
$$X(\omega_1) = -10,\quad X(\omega_2) = 4,\quad X(\omega_3) = 8$$
$$E[X] = 5.64,\quad V[X] = 8.9104$$

・危険回避度を $\alpha = 0.05$ とする。
・上で見た表より、$U^{(0.05)}(X) = 5.381304 > 0$ であり、X は実行されよう。
・事業規模 λ が小さいとき（$\lambda \leq 7$）には $U^{(0.05)}(\lambda X) > 0$ であり、事業 λX は単独で実行され得るが、大規模（$\lambda \geq 8$）になると $U^{(0.05)}(\lambda X) < 0$ となるので、λX は単独では実行されないことになる。

- 以下、事業規模を $\lambda = 10$ とした場合を考察する。
・$U^{(0.05)}(10X) = -22.268194 < 0$ であり、X は単独では実行されない。
・このとき次のような保険 Y があったとする。
$Y(\omega_1) = 5$、他の場合は 0 。
・保険 Y の価格を $\pi(Y)$ とする。
・この保険を 10 単位購入した時の総合的価値は

$$U^{(0.05)}(10X + 10Y) = 22.7819$$

・もし Y の価格 $\pi(Y)$ が 2.27819 より安ければ

$$U^{(0.05)}(10X + 10Y) - 10\pi(Y) = 22.7819 - 10\pi(Y) > 0$$

となり、$10X$ は $10Y$ の購入を前提に実行可能と判断されよう。
・一方売り手の立場から見ると、 $E[Y] = 0.1$ となるので Y の価格 $\pi(Y)$ が 0.1 より高ければ Y を売る価値があると判断できる。
・以上の考察から、Y の価格 $\pi(Y)$ が

$$0.1 < \pi(Y) < 2.27819$$

ならば $10Y$ の売買が成立し、事業 $10X$ も実行されるであろう。

- 参考までに、$10Y$ と $10X + 10Y$ の価値と付加価値は次のようになる：

$$E[Y] = 0.1, \quad V[Y] = 0.4900$$
$$MV[10Y] = -0.2250 < 0$$
$$U^{(0.05)}(10Y) = 0.3706 < 10\pi(Y), \quad (\pi(Y) > 0.1)$$
$$E[10X + 10Y] = 57.4000, \quad V[10X + 10Y] = 6.3225$$
$$MV[10X + 10Y] = -0.1112 < 0$$
$$U^{(0.05)}(10X + 10Y) = 22.7819 \quad > 0$$
$$\begin{aligned} U^{(0.05)}(10Y|10X) &= U^{(0.05)}(10X + 10Y) - U^{(0.05)}(10X) \\ &= 22.7819 - (-22.268194) = 45.05 \end{aligned}$$

・注意すべきことは、$10Y$ 自身の価値は低い（価格を引けば、$U^{(0.05)}(10Y) - 10\pi(Y) < 0$ となる）が、$10Y$ の $10X$ への付加価値は非常に高いということである。

注 6.2 保険の代わりに適当な金融派生商品を利用することも、同様の効果がある。

例 6.4 （数値例）。X は次のように与えられているものとする。

$$P(\{\omega_1\}) = 0.1,\ P(\{\omega_2\}) = 0.5,\ P(\{\omega_3\}) = 0.4$$
$$X(\omega_1) = -5,\quad X(\omega_2) = 3,\quad X(\omega_3) = 5$$
$$MV[X] = -1,\quad U^{(1)}(X) = -2.6993$$

$U^{(1)}(X) < 0$ であるから、X は単独では実行されない。

このとき次のような制約条件付債券 Y があったとする。

$$Y(\omega_1) = 4,\quad Y(\omega_2) = -1.5,\quad Y(\omega_3) = 1$$

その場合には

$$U^{(1)}(X+Y) = 0.9561$$

となる。ここで、もし Y の価格 $\pi(Y)$ が 0.9561 より安ければ

$$U^{(1)}(X+Y) - \pi(Y) = 0.9561 - \pi(Y) > 0$$

となり、X は Y の利用を前提に実行可能と判断されよう。

一方売り手の立場から見ると、 $E[Y] = 0.05$ となるので Y の価格 $\pi(Y)$ が 0.05 より高ければ Y を売る価値があると判断できる。

以上の考察から、Y の価格 $\pi(Y)$ が

$$0.05 < \pi(Y) < 0.9561$$

ならば Y の売買が成立し、事業 X も実行されるであろう。

- 参考までに、Y および $Z = X + Y$ については次のようになる。

$$E[Y] = 0.05,\quad V[Y] = 3.1225$$
$$MV[Y] = -1.5112$$
$$U^{(1)}(Y) = -0.8712$$
$$E[Z] = 3.05,\quad V[Z] = 6.3225$$
$$MV[Z] = -0.1112$$
$$U^{(1)}(Z) = 0.9561$$

- Y の X への付加価値 $U^{(1)}(Y|X)$ は

$$U^{(1)}(Y|X) = U^{(1)}(X+Y) - U^{(1)}(X) = 0.9561 - (-0.8712) = 1.8273$$

である。

6.2.2　CAT bond の有効性

規模のリスクという視点から見ると、CAT bond の有効性が、自然な形で説明できる。

例 6.5 （数値例）

・X は前と同じものとする。

$$P(\{\omega_1\}) = 0.02,\ P(\{\omega_2\}) = 0.5,\ P(\{\omega_3\}) = 0.48 \tag{6.4}$$

$$X(\omega_1) = -10,\quad X(\omega_2) = 4,\quad X(\omega_3) = 8 \tag{6.5}$$

$$E[X] = 5.64,\quad V[X] = 8.9104 \tag{6.6}$$

・会社の危険回避度を $\alpha = 0.01$ とする。

・$U^{(0.01)}(X) = 5.5942 > 0$ であり、X は実行されよう。

この事業を推進する会社が、この事業を大規模に実施することとして、$100X$ の規模で実施することを考えたとする。この場合、この規模の事業に対する会社の評価は

$$U^{(0.01)}(100X) = -608.7998 \tag{6.7}$$

となり、$100X$ の規模の事業はマイナスの評価となる。すなわちリスクが大き過ぎると判断され実行されないだろう。

このとき、このリスクを回避する方法として X に対応する次のような *CAT bond*、*CB*、を発行することを考えてみよう。額面（＝償還額）12, 価格 10。この *CB* の買い手から見たリターンを Y とすると、

$$Y(\omega_1) = -10,\quad Y(\omega_2) = Y(\omega_3) = 2 \tag{6.8}$$

$$E[Y] = 1.76,\quad V[Y] = 2.8464 \tag{6.9}$$

であり、その評価は、買い手のリスク回避度を 0.05 （会社のリスク回避度よりも高い）として、

$$\text{買い手：}\quad U^{(0.05)}(Y) = 1.7453 \tag{6.10}$$

$$\text{売り手（会社）：}\quad U^{(0.01)}(-Y) = -1.7637 \tag{6.11}$$

となる。すなわち、この *Bond* を単独で評価した場合には、買い手にとっての評価は高いが売り手（ *Bond* の発行会社）にとってマイナスである。

しかしながら、この *Bond* の買い手を 100 人見つけることが出来たとすると、*Bond* と事業とを総合して評価して、

$$U^{(0.01)}(100X - 100Y) = 242.0722 \tag{6.12}$$

となり、会社にとって高い評価となる。すなわち、この *Cat Bond* は売り手および買い手の両者にとって非常に意味のあるものとなっている。

注 6.3 この例の場合

$$U^{(0.01)}(X - Y) = 3.8589 < U^{(0.01)}(X) = 5.5942 \tag{6.13}$$

であり、規模が小さいままの場合には *Cat Bond* を導入する意味は無い。

6.3 内部リスク回避度（IRRA）

資産選択の問題に関して、リターンの評価とリスク回避度との関連を検討する上で意味があると思える指標として、内部リスク回避度 (IRRA) がある。

6.3.1 内部リスク回避度（IRRA）の定義

定義 6.1 資産のリターン X に対して、次の条件

$$U^{(\alpha)}(X) = 0 \tag{6.14}$$

を満たす α を X の <u>内部リスク回避度（*IRRA : inner rate of risk avertion*）</u>と呼び、$\alpha_0(X)$ で示す。

・IRRA $\alpha_0(X)$ の値は X を RSVM $U^{(\alpha)}(X)$ で評価するとき、正と評価するか負と評価するかの評価者の持つ危険回避度の境界線である。$\alpha < \alpha_0(X)$ なる危険回避度の評価者は正と評価し、$\alpha > \alpha_0(X)$ なる評価者は負と評価する。

・ $\alpha_0(X)$ の値が高いとき、X の安全度が高い。

・IRRA はリスクに対する 1 つの指標である。特に、$\alpha_0(\lambda X)$ は規模のリスクの指標になっている。

6.3.2 IRRA の存在定理

定理 6.1 確率変数 X が積率母関数を持ち、次の条件

$$E[X] > 0, \quad P(X < 0) > 0, \tag{6.15}$$

を満たしているものとする。この時

（１） X の内部リスク回避度（*IRRA*）$\alpha_0(X) > 0$ が一意的に定まる。

（２） λX の内部リスク回避度（*IRRA*）$\alpha_0(\lambda X)$ の値は規模が拡大するとき規模に反比例して低下する。すなわち次の関係式が成立する。

$$\alpha_0(\lambda X) = \frac{\alpha_0(X)}{\lambda}. \tag{6.16}$$

（証明）（１） $\alpha_0(X)$ は、次の方程式の解である。

$$U^{(\alpha)}(X) = -\frac{1}{\alpha}\log E[e^{-\alpha X}] = 0 \tag{6.17}$$

$\alpha = 0$ では $U^{(0)}(X) = E[X] > 0$ である。従って上の方程式は $\alpha > 0$ の時を調べればよいので、次式と同値である。

$$-\log E[e^{-\alpha X}] = 0 \tag{6.18}$$

ここで $-\log E[e^{-\alpha X}] = U^{(1)}(\alpha X)$ に注意する。

さらに $U^{(\alpha)}(\lambda X)$ は λ の凹関数である（系 4.1）ので、 $U^{(1)}(\alpha X)$ は α の凹関数である。

一方、定理 5.4、（１）より、$\lim_{\alpha\to\infty} U^{(1)}(\alpha X) = -\infty$ であるので、解の一意的な存在が分かる。

（２） $\alpha_0(\lambda X)$ は次の方程式の解である。

$$-\log E[e^{-\alpha\lambda X}] = 0 \tag{6.19}$$

この方程式と $\alpha_0(X)$ の満たす方程式とを比較すれば明らかである。(Q.E.D.)

6.3.3　格付けへの応用

IRRA の定義から、$\alpha_0(X)$ の値が高いときには安全度が高いと言える。このことから、この値を資産 X の格付けの指標に採用することが可能である。

また、上の定理 6.1 の（２）より、IRRA による格付けは規模の増加に伴って反比例的に低下していくことがわかる。すなわち、規模のリスクを考慮に入れた格付けになっている。

IRRA を適用して判断しようとする際には $\alpha_0(\lambda X)$ の表を作成しておくことになる。例えば、対象となる資産に対して投資額 100 万円に対するリターンを X とするとき、

資産 \ 投資額（万円）	100	200	300	400
X_1	$\alpha_0(X_1)$	$\alpha_0(2X_1)$	$\alpha_0(3X_1)$	$\alpha_0(4X_1)$
X_2	$\alpha_0(X_2)$	$\alpha_0(2X_2)$	$\alpha_0(3X_2)$	$\alpha_0(4X_2)$
X_3	$\alpha_0(X_3)$	$\alpha_0(2X_3)$	$\alpha_0(3X_3)$	$\alpha_0(4X_3)$
X_4	$\alpha_0(X_4)$	$\alpha_0(2X_4)$	$\alpha_0(3X_4)$	$\alpha_0(4X_4)$

といった表を作成しておく。上で述べたように、

$$\alpha_0(\lambda X) = \frac{\alpha_0(X)}{\lambda}$$

である。

例 6.6 （数値例）（前の　*X,Y,Z*　に対して）　それが、投資額 *I=10* 万円に対するリターン（損益額）だとして、その *IRRA* α_0 の値は次のようになる。

資産　\ 投資額（万円）	*10*	*20*	*30*	*50*	*100*
X	0.3768	0.1884	0.1256	0.0754	0.0377
Y	0.9404	0.4702	0.3135	0.1881	0.0940
Z	1.1990	0.5995	0.3997	0.2398	0.1199

この数値表より、３つの資産の格付けとしては、$X < Y < Z$ であるということになる。(なお、投資判断に利用する方法については、§*6.3.4* を見よ。)

注 6.4 上の格付けを平均と分散に注目する立場からの格付けと比較してみよう。§*6.1.2* の数値例で見た結果より、収益（平均）重視なら $X > Y > Z$ となる。平均と分散の両者を考慮したときも同様に $X > Y > Z$ で、Z は圧倒的に低い評価になる。この例の場合、平均・分散分析（*MV*）による格付けと *RSVM* による格付けの結果とは全く異なる結果となっている。

6.3.4 IRRA を利用した投資判断

投資家のリスク回避度 α が定まっている時、投資銘柄 X と投資規模 λ は、$\alpha_0(\lambda X) \geq \alpha$ の範囲で選択されるべきである。

例 6.6 の数値例に即して述べると、次のようになる。

ある投資家の危険回避度 α が 0.1 であったとする。この投資家は、X に投資するなら 30 万円程度まで、Y に投資するなら 50 万円を超えてもよいが、100 万円までにはしない方が良い。Z には 100 万円まで投資してもよい。ということになる。

上と同じ危険回避度を持つ投資家が 50 万円をどれかの資産に投資しようと考えている場合を考察しよう。その場合には、X への投資はやめて Y または Z のどちらかを選択すべきである。

もし 100 万円の投資を考えている場合なら、可能な対象は Z のみになる。

6.4 相互補完関係を使ったリスク回避法の議論

§4.4 で見た相互補完関係と条件付き付加価値の考えを使って、リスクの回避またはリスクの軽減の議論が可能となる。

6.4.1 補完的事業の導入によるリスクヘッジ

確率変数 X と W が次のように与えられているものとする。

$$P(\{\omega_1\}) = 0.02,\ P(\{\omega_2\}) = 0.5,\ P(\{\omega_3\}) = 0.48, \tag{6.20}$$

$$X(\omega_1) = -10, X(\omega_2) = 4, X(\omega_3) = 8, \tag{6.21}$$

$$E[X] = 5.64, V[X] = 8.9104, \tag{6.22}$$

$$W(\omega_1) = 10, W(\omega_2) = -1, W(\omega_3) = -1, \tag{6.23}$$

$$E[W] = -0.7800, V[W] = 2.3716. \tag{6.24}$$

（注。X の分布は以前のものと同じである。）

このとき、RSVM による評価は次のようになる。

$$U^{(0.05)}(X) = 5.381304 > 0, \quad U^{(0.05)}(10X) = -22.268194 < 0 \tag{6.25}$$

$$U^{(0.05)}(W) = -0.8301 < 0, \quad U^{(0.05)}(10W) = -9.5976 < 0. \tag{6.26}$$

これより、リターンが X であるようなプロジェクトは実行されるであろうが、それ以外の $10X, W$ および $10W$ に対応するプロジェクトは単独では実行されないことになろう。

しかし、ここで次のような評価が得られることに注意しよう。

$$U^{(0.05)}(X+W) = 4.7498 > 0, \ \ U^{(0.05)}(10X+10W) = 38.4748 > 0. \tag{6.27}$$

この結果から、$X+W$ に対応するプロジェクトおよび $10X+10W$ に対応するプロジェクトはともに実行する価値のあるプロジェクトになっていることが分かる。すなわち、$10X$ や $10W$ は単独で実行する価値はないが、両者を同時に実行することは大いに有効と判断されることになる。

この例は、それぞれが個別には実行する価値の無いような二つのプロジェクトであっても、相互補完的な関係にある場合には両者を同時に実行することにより価値が飛躍的に高まる可能性のあることを示している。

もうひとつ数値例を挙げておこう。

例 6.7 （数値例）。

$$
\begin{aligned}
P(\{\omega_1\}) &= 0.01,\quad P(\{\omega_2\}) = 0.60,\quad P(\{\omega_3\}) = 0.39\\
X(\omega_1) &= -20,\quad X(\omega_2) = 3,\quad X(\omega_3) = 5\\
Y(\omega_1) &= 16,\quad Y(\omega_2) = 0,\quad Y(\omega_3) = -1\\
E[X] &= -20 \times 0.01 + 3 \times 0.6 + 5 \times 0.39 = 3.55,\\
E[Y] &= 16 \times 0.01 - 1 \times 0.39 = -0.23\\
E[X+Y] &= 3.32\\
U^{(1)}(X) &= -\log\left(\left(0.01e^{20} + 0.6e^{-3} + 0.39e^{-5}\right)\right) \fallingdotseq -15.395\\
U^{(1)}(Y) &= -\log\left(\left(0.01e^{-16} + 0.6 + 0.39e^{1}\right)\right) \fallingdotseq -0.507\\
U^{(1)}(X+Y) &= -\log\left(\left(0.01e^{4} + 0.6e^{-3} + 0.39e^{-4}\right)\right) \fallingdotseq 0.539
\end{aligned}
$$

上の数値例について、次のように判断される。

・NPV（E[ ]）で判断する場合には、X は採用されるが Y は非採用。

・$E[X+Y] = E[X] + E[Y]$ であり、Y を採用するメリットは無いと判断される。

・RSVM で見た場合には、X も Y も、個別に見た場合にはともに不採用。

・しかし、両者を合わせて行うことは意味があり採用される。

注 6.5 上に見た例では $v(X+Y) > v(X) + v(Y)$ であった。しかし、いつもこうなるわけではなく $v(X+Y) < v(X) + v(Y)$ となる場合もある。（独立加法性より、X と Y が独立な場合には $v(X+Y) = v(X) + v(Y)$ である。一般には両者は異なる。）

6.4.2 複合的な事業評価：最適事業ポートフォリオの構築

複数の事業の総合的な評価も可能である。その場合、相互補完性の性質を利用して、最適な事業ポートフォリオの構築を議論することが可能となる。さらには、企業の価値評価にも応用可能である。

これらについては、第 10 章で述べる。

6.5 リスクの回避および軽減化の評価

6.5.1 制約条件付き債権（contingent claim）の評価への応用

ある事業を計画する際に、それに伴って生じるリスクを軽減するために金融派生商品を購入する場合の価値判断を、リスク鋭感的価値尺度 $U^{(\alpha)}(\cdot)$ を使って行うものとする。

X： 基礎となるキャッシュフローのランダムな現在価値。

Y： 考察対象の金融派生商品（制約条件付き債券とする）。

仮に $U^{(\alpha)}(X)$ が負の場合でも、適当な Y を購入することにより $U^{(\alpha)}(Y+X)-\pi(Y)>0$（$\pi(Y)$ は Y の価格）と出来るならば、Y の購入を前提にしてプロジェクト X を実行する価値があると判断できる。

例 6.8 （数値例）。X は次のように与えられているものとする。

$$P(\{\omega_1\})=0.1,\ P(\{\omega_2\})=0.6,\ P(\{\omega_3\})=0.3$$
$$X(\omega_1)=-5,\quad X(\omega_2)=3,\quad X(\omega_3)=5$$
$$U^{(1)}(X)\doteqdot-2.700$$

$U^{(1)}(X)<0$ であるから、X 単独では実行されない。
このとき次のような制約条件付き債券があったとする。

$$Y(\omega_1)=4,\quad Y(\omega_2)=0,\quad Y(\omega_3)=0$$

その場合には

$$U^{(1)}(X+Y)=-\log\left(\left(0.1e^{1}+0.6e^{-3}+0.3e^{-5}\right)\right)\doteqdot1.192$$

となり、$U^{(1)}(X+Y)>0$ であるから、もし Y の価格 $\pi(Y)$ が 1.192 より安ければ、X は Y を利用することを前提に実行可能と判断されよう。
一方 Y の売り手の立場から見ると、Y に対する支払いの平均は 0.4 となるので、 Y の価格 $\pi(Y)$ が 0.4 より高ければ売る価値があると判断できる。

• 参考までに、$U^{(1)}(Y)$ と $U^{(1)}(Y|X)$ は次のようになる。

$$\begin{aligned} U^{(1)}(Y) &\doteqdot 0.103 \\ U^{(1)}(Y|X) &\doteqdot 1.192-(-2.700)=3.892 \end{aligned}$$

これより、Y は単独での価値は低いが X に対して高い付加価値を付けていることが分かる。

6.5.2 保険商品の評価への応用

上で金融派生商品を使ってリスクの低減を行ったところを、保険で置き換えて考えることも可能である。これを、より保険らしい数値例で見ておこう。

例 6.9 （数値例）。

$$P(\{\omega_1\})=0.01,P(\{\omega_2\})=0.60,P(\{\omega_3\})=039$$
$$X(\omega_1)=-20,\quad X(\omega_2)=3,\quad X(\omega_3)=5$$
$$Y(\omega_1)=20,\quad Y(\omega_2)=0,\quad Y(\omega_3)=0$$
$$U^{(1)}(X)=-\log\left(\left(0.01e^{20}+0.6e^{-3}+0.39e^{-5}\right)\right)\doteqdot-15.395$$
$$U^{(1)}(X+Y)=-\log\left(\left(0.01e^{0}+0.6e^{-3}+0.39e^{-5}\right)\right)\doteqdot3.158$$

Y の価格 $\pi(Y)$ が 3.158 より安ければ、X は Y を購入することを前提に実行可能と判断されよう。

一方 Y の売り手 (保険会社）は、Y に対する支払いの平均は *0.2* となるので、 Y の価格 $\pi(Y)$ を *0.2* より高く設定出来れば販売する価値があると判断できる。

- 参考。$U^{(1)}(Y)$ と $U^{(1)}(Y|X)$ は次のようになる。

$$
\begin{aligned}
U^{(1)}(Y) &\fallingdotseq 0.010 \\
U^{(1)}(Y|X) &\fallingdotseq 3.158 - (-15.395) = 18.553
\end{aligned}
$$

これより、Y は単独での価値は低いが X に対して非常に高い付加価値を付けていることが分かる。

6.5.3　金融派生商品への出資規模

定理 4.5 の結論「 $v(Y|X)$ は X を固定したとき Y の関数として凹マネタリ価値尺度になっている。」より、$v(\lambda(Y-\pi(Y))+X)$ を最大にする λ が決まる可能性がある。この時、その値は導入する保険等の最適な規模になる。

第7章　リスク鋭感的価値尺度の動学化

プロジェクトの推進過程における戦略の選択（すなわち、リアルオプション・アプローチ）は時間の経過とともに各時点でなされる。従って、プロジェクトの価値評価は各時点ごとになされる必要がある。それを可能にするものが動学的価値尺度である。

7.1　動学的凹マネタリ価値尺度

これについてはすでに §4.7 で見てあるが、本章での議論を分かり安くするために、その要点をまとめておこう。

7.1.1　定義

確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ と情報の空間（フィルトレーション）$\{\mathcal{F}_t, t = 0, 1, 2, \cdots\}$ が与えられておるものとする。

定義 7.1 (動学的凹マネタリ価値尺度) 各時点 t, $t = 0, 1, 2, \cdots, T$, ごとに凹マネタリ価値尺度（*a concave monetary value measure*） $v_t(X) : L(\mathcal{F}_T) \to L(\mathcal{F}_t)$ が定義されているとき、その全体 $\{v_t(X), t = 0, 1, 2, \cdots, T\}$ を動学的凹マネタリ価値尺度（*dynamic concave monetary value measure*）と呼ぶ。

7.1.2　動学的価値尺度と時間的整合性

動学的価値尺度が適切な評価尺度であるための要請として、時間的整合性の問題がある。

定義 7.2 (時間的整合性 (time-consistency)) 動学的マネタリ価値尺度 $\{v_t(X), t = 0, 1, 2, \cdots, T\}$ が次の性質

$$v_t(X) = v_t(v_{t+1}(X)), t = 0, 1, 2, \cdots, T-1, \tag{7.1}$$

を持っているとき、時間的整合性（*time-consistency*）を持っていると言う。

時間的整合性を持った動学的凹マネタリ価値尺度 $\{v_t(X), t = 0, 1, 2, \cdots, T\}$ と $\mathcal{F}_t$-適合的なキャッシュフロー $\mathbf{C} = \{C_0, C_1, \cdots, C_T\}$ に対して $\tilde{C}_t = \frac{C_t}{(1+r)^t}$ と置いて、

$$\begin{aligned} v_t(\sum_{s=t+1}^{T} \tilde{C}_s) &= v_t\left(v_{t+1}\left(\sum_{s=t+1}^{T} \tilde{C}_s\right)\right) \\ &= v_t\left(\tilde{C}_{t+1} + v_{t+1}\left(\sum_{s=t+2}^{T} \tilde{C}_s\right)\right), \ t = 0, 1, \cdots, T-1, \end{aligned} \tag{7.2}$$

を得る。ここで

$$V_t = \tilde{C}_t + v_t\left(\sum_{s=t+1}^{T} \tilde{C}_s\right),\ t = 0, 1, \cdots, T-1, \tag{7.3}$$

と置くと、次式が得られる。

$$V_t = \tilde{C}_t + v_t(V_{t+1}),\ t = 0, 1, \cdots, T-1, \tag{7.4}$$

$$V_T = \tilde{C}_T. \tag{7.5}$$

この関係式により、$\{V_t; t = T-1, T-2, \cdots, 0\}$ を最終時点から再帰的に求めることができ、最終的に

$$V_0 = \tilde{C}_0 + v_0(V_1) = v_0\left(\sum_{s=0}^{T} \tilde{C}_s\right) = v_0(RPV(\mathbf{C})) \tag{7.6}$$

が求まる。

7.1.3　再帰的評価とベルマン方程式

戦略（コントロール）$\Phi = \{\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_T\}$ を導入した場合には、次のような結果が得られる。

$$\begin{aligned}
\overline{V} &= \sup_{\Phi}\left\{v_0\left(RPV(C^{(\Phi)})\right)\right\} = \sup_{\Phi}\left\{\tilde{C}_0 + v_0\left(\sum_{t=1}^{T}\tilde{C}_t^{(\Phi)}\right)\right\} \\
&= \tilde{C}_0 + \sup_{\phi_1,\cdots,\phi_T}\left\{v_0\left(v_1\left(\sum_{t=1}^{T}\tilde{C}_t^{(\Phi)}\right)\right)\right\} \\
&= \tilde{C}_0 + \sup_{\phi_1,\cdots,\phi_T}\left\{v_0\left(\tilde{C}_1^{(\Phi)} + v_1\left(\sum_{t=2}^{T}\tilde{C}_t^{(\Phi)}\right)\right)\right\} \\
&= \cdots \\
&= \tilde{C}_0 + \sup_{\phi_1}\left\{v_0\left(\tilde{C}_1^{(\Phi)} + \sup_{\phi_2}\left\{v_1\left(\tilde{C}_2^{(\Phi)} + \cdots\right.\right.\right.\right. \\
&\qquad \left.\left.\left.\left.\cdots + \sup_{\phi_{T-1}}\left\{v_{T-2}\left(\tilde{C}_{T-1}^{(\Phi)} + \sup_{\phi_T}\left\{v_{T-1}\left(\tilde{C}_T^{(\Phi)}\right)\right\}\right)\right\}\cdots\right)\right\}\right)\right\}.
\end{aligned} \tag{7.7}$$

この公式はベルマン方程式の形をしており、時間的に逆向きの再帰方程式になっている。従って、$\{\overline{V}_t^{(\Phi)},\ t = T, T-1, \cdots, 0\}$ を次のように再帰的に計算できる。

$$\overline{V}_T^{(\Phi)} = \tilde{C}_T^{(\Phi)} \tag{7.8}$$

$$\overline{V}_{T-1}^{(\Phi)} = \tilde{C}_{T-1}^{(\Phi)} + \sup_{\phi_T} v_{T-1}\left(\overline{V}_T^{(\Phi)}\right) \tag{7.9}$$

$$\cdots$$

$$\overline{V}_t^{(\Phi)} = \tilde{C}_t^{(\Phi)} + \sup_{\phi_{t+1}} v_t\left(\overline{V}_{t+1}^{(\Phi)}\right) \tag{7.10}$$

$$\cdots$$

$$\overline{V}_0^{(\Phi)} = \tilde{C}_0 + \sup_{\phi_1} v_0\left(\overline{V}_1^{(\Phi)}\right) \tag{7.11}$$

こうして得られた $\overline{V}_0^{(\Phi)}$ が、初期投資額を指定したときの最適戦略を採用した場合のプロジェクトの価値 $\overline{V}$ である。

7.2 動学的リスク鋭感的価値尺度

リスク鋭感的価値尺度を動学化して、次の動学的リスク鋭感的価値尺度が定義される。

定義 7.3 $\alpha > 0$ に対して

$$\begin{aligned} U_t^{(\alpha)}(X) = -\tfrac{1}{\alpha}\log E\left[e^{-\alpha X}|\mathcal{F}_t\right], \\ t = 0, 1, \cdots, T. \end{aligned} \tag{7.12}$$

をリスク回避度 α の動学的リスク鋭感的価値尺度（*risk-sensitive dynamic value measure*）と言う。

7.2.1 動学的リスク鋭感的価値尺度の時間整合性

上で導入された動学的リスク鋭感的価値尺度が時間的整合性を持っていることは容易に確かめられる。従って、リスク鋭感的価値尺度を実際のプロジェクトの評価に使う場合には、リアルオプション・アプローチが自然な形で適用可能である。

重要なことは、他の望ましい性質とともに時間整合性を持った凹マネタリ価値尺度は、ほぼこの動学的リスク鋭感的価値尺度に限られるということである。これについて説明する。

４節で検討したように、適切な凹マネタリ価値尺度は効用無差別価値の中から選ぶことが妥当であった。その立場から、「効用無差別価値として構築される動学的凹マネタリ価値尺度が時間整合性を持つような効用関数は何か？」という問題が生じる。これに対して、次のような結果が得られている。

定理 7.1 （Kupper and Schachermayer [14]） 或る適当な仮定の下で、効用無差別価値として構成される時間的整合性を持った動学的凹マネタリ価値尺度は動学的リスク鋭感的価値尺度に限られる。

注 7.1 この定理を効用関数に対して言いなおせば、「或る効用関数からの効用無差別価値として定まる動学的凹マネタリ価値尺度が時間的整合性を持つのは、その効用関数が指数型の効用関数の場合でありかつその場合に限られる。」ということである。

7.2.2 動学的リスク鋭感的価値尺度によるプロジェクト評価

戦略 Φ およびそれに対応して得られるキャッシュフロー $\mathbf{C}^{(\Phi)}$ および $\tilde{\mathbf{C}}^{(\Phi)}$ は前と同じものとする。評価は次のようになる。

$$U^{(\alpha)}(RPV(\mathbf{C}^{(\Phi)})) = -\tfrac{1}{\alpha}\log E\left[e^{-\alpha\sum_{s=0}^{T}\tilde{C}_s^{(\Phi)}}\right], \tag{7.13}$$

$$\overline{V} = \sup_{\Phi} U^{(\alpha)}(RPV(\mathbf{C}^{(\Phi)})) = \sup_{\Phi}\left\{-\tfrac{1}{\alpha}\log E[e^{-\alpha\sum_{t=0}^{T}\tilde{C}_t^{(\Phi)}}]\right\}. \tag{7.14}$$

注 7.2 この形をみると、これはリスク鋭感的コントロール（*risk sensitive control*）の形をしている。この事実が、「リスク鋭感的価値尺度（*risk-sensitive value measure*）」なる命名の主たる理由である。

ここで得られた値 $\overline{V}$ がリアルオプション・アプローチを使った場合のリスク鋭感的価値尺度によるプロジェクトの評価値である。この結果、次のような判断がなされよう。
（１）$\overline{V} > 0$ の場合、最適戦略の採用を前提にしてプロジェクトを実行する価値がある。
（２）$\overline{V} \leqq 0$ の場合、プロジェクトは実行する価値が無い。

7.2.3　プロジェクトの評価値 $\overline{V}$ の計算

$$U_t^{(\alpha)}(RPV(\mathbf{C}^{(\Phi)})) = -\frac{1}{\alpha}\log E\left[e^{-\alpha\sum_{s=0}^{T}\tilde{C}_s^{(\Phi)}}|\mathcal{F}_t\right], \qquad t = 0, 1, \cdots, T, \tag{7.15}$$

を使って、

$$\begin{aligned}
\overline{V} &= \sup_{\Phi}\left\{U_0^{(\alpha)}\left(RPV(C^{(\Phi)})\right)\right\} = \sup_{\Phi}\left\{\tilde{C}_0 + U_0^{(\alpha)}\left(\sum_{t=1}^{T}\tilde{C}_t^{(\Phi)}\right)\right\} \\
&= \tilde{C}_0 + \sup_{\phi_1,\cdots,\phi_T}\left\{U_0^{(\alpha)}\left(v_1\left(\sum_{t=1}^{T}\tilde{C}_t^{(\Phi)}\right)\right)\right\} \\
&= \cdots \\
&= \tilde{C}_0 + \sup_{\phi_1}\left\{U_0^{(\alpha)}\left(\tilde{C}_1^{(\Phi)} + \sup_{\phi_2}\left\{U_1^{(\alpha)}\left(\tilde{C}_2^{(\Phi)} + \cdots\right.\right.\right.\right. \\
&\qquad \left.\left.\left.\left.\cdots + \sup_{\phi_{T-1}}\left\{U_{T-2}^{(\alpha)}\left(\tilde{C}_{T-1}^{(\Phi)} + \sup_{\phi_T}\left\{U_{T-1}^{(\alpha)}\left(\tilde{C}_T^{(\Phi)}\right)\right\}\right)\right\}\cdots\right)\right\}\right)\right\}
\end{aligned} \tag{7.16}$$

により計算できる。

こうして、逆向きに条件付き期待値と最適値を求めてゆけば良く、 $\{\overline{V}_t^{(\Phi)},\ t = T, T-1, \cdots, 0\}$ を次のように再帰的に計算することができる。

$$\overline{V}_T^{(\Phi)} = \tilde{C}_T^{(\Phi)} \tag{7.17}$$

$$\overline{V}_{T-1}^{(\Phi)} = \tilde{C}_{T-1}^{(\Phi)} + \sup_{\phi_T} U_{T-1}^{(\alpha)}\left(\overline{V}_T^{(\Phi)}\right) \tag{7.18}$$

$$\cdots$$

$$\overline{V}_t^{(\Phi)} = \tilde{C}_t^{(\Phi)} + \sup_{\phi_{t+1}} U_t^{(\alpha)}\left(\overline{V}_{t+1}^{(\Phi)}\right) \tag{7.19}$$

$$\cdots$$

$$\overline{V}_0^{(\Phi)} = \tilde{C}_0 + \sup_{\phi_1} U_0^{(\alpha)}\left(\overline{V}_1^{(\Phi)}\right) \tag{7.20}$$

こうして得られた $\overline{V}_0^{(\Phi)}$ が、初期投資額を指定したときの、最適戦略を採用した場合のプロジェクトの価値 $\overline{V}$ である。これは確率的最適化問題を解く場合の標準的な手順である。

以上から、プロジェクトの構造が戦略のクラスも含めて与えられれば、リアルオプション・アプローチを使ったリスク鋭感的価値尺度によるプロジェクトの価値を求める問題は、標準的な確率的最適化理論 (特に、リスク鋭感的確率制御理論）を使って解く問題に帰着されることになった。

注 7.3 *RSVM* の場合、*Bellman* 型の逆向き方程式は、明示的には次のようにも表現できる。

$$\overline{V} = \tilde{C}_0 - \frac{1}{\alpha}\log\Biggl(\inf_{\phi_1}\Biggl\{E\Biggl[e^{-\alpha\tilde{C}_1^{(\Phi)}}\inf_{\phi_2}\{E[\ \cdots \\ \cdots\ \inf_{\phi_T}\Biggl\{E\Biggl[e^{-\alpha\tilde{C}_T^{(\Phi)}}|\mathcal{F}_{T-1}\Biggr]\Biggr\}\cdots|\mathcal{F}_1\Biggr]\Biggr\}\Biggr]\Biggr\}\Biggr). \tag{7.21}$$

7.2.4 動学的リスク鋭感的価値尺度の優れた点

すでに前節で述べたリスク鋭感的価値尺度の持つ特徴に加えて、時間整合性を持っていることが分かった。動学的リスク鋭感的価値尺度の特徴を改めて列挙しておく。
（１）動学的凹マネタリ価値尺度になっている。
（２）指数型効用関数の効用無差別価値である。
（３）規模リスクおよび規模に対する最適性を議論できる。
（４）独立加法性を持っている。（効用無差別価値の中でこの性質を持つものは、ほぼリスク鋭感的価値尺度のみである。）
（５）時間整合性を持っている。（効用無差別価値の中でこの性質を持つものは、ほぼ動学的リスク鋭感的価値尺度のみである。）
（６）分布の特徴を反映したリスク鋭感的な価値尺度であり、リスクへの態度はパラメーター α の中に入っている。

ここで再度強調しておきたいことは、**「動学的リスク鋭感的価値尺度は上に述べたような好ましい性質の全てを持っており、逆にこのような性質を全て備えている価値尺度は唯一 <u>動学的リスク鋭感的価値尺度のみ</u> である。」** ということである。

7.3 動学的リスク鋭感的価値尺度法の応用分野

ランダムな要素のあるキャッシュフローの価値評価のほぼあらゆる問題に対応可能であると言えるが、特にランダムネスやリスク要因が大きいと考えられる対象に対して有効である。下にいくつかの応用可能分野を列挙しておく。

7.3.1 プロジェクトの価値評価

本書の主目標はプロジェクトの価値評価であり、プロジェクトから生み出される戦略を伴ったランダムなキャッシュフロー $\mathbf{C}^{(\Phi)} = \{C_0, C_1^{(\Phi)}, \cdots, C_T^{(\Phi)}\}$ の評価である。
プロジェクト評価については、第８章で詳しく述べる。

注 7.4 戦略を伴わない一つのキャッシュフロー $\mathbf{C} = \{C_0, C_1, \cdots, C_T\}$ を評価したい場合には、動学的に扱う必要はなくなる。たとえば、固定的なポートフォリオの評価はその一例である。

プロジェクトの価値評価と同様に扱える問題としては、次のようなものがある。

知財の価値評価、研究開発の価値評価、ベンチャー企業の将来性の評価、など。（[17]、[29] など。）
設備や工場の最適なメンテナンス法（[18] など。）

7.3.2　複数の事業・投資の総合的評価

プロジェクトの評価は単独での評価も重要であるが、複数の事業を総合的に評価することはより重要であろう。その場合には、モデルの設定法とも関係する問題であるが、多くのキャッシュフローを対象とし、それらを統合して最終的に評価すべきキャッシュフローを構築することになる。これは、総合的リスク管理（ERM: Enterprise Risk Management）において重要な役割を果たしうるものである。
この問題は第１０章で論じる。

7.3.3　M&A における企業価値評価

M&A により得られた資産の自社への効果は、前項の「複数の事業・投資の総合的評価」と同様の問題となる。

7.3.4　資産ポートフォリオの評価

本章での議論はまた、「資産ポートフォリオの評価」にも通じる問題である。
[27] 等を参照。

7.4　動学的リスク鋭感的価値尺度法の適用手順

これまで、動学的リスク鋭感的価値尺度法の特質を説明してきたが、上に例示したような分野の具体的な問題への適用は、次のような手順でなされることになる。

１）確率モデルの設定

２）採用すべきリスク回避度の決定

３）ランダムなキャッシュフローのランダムな現在価値の計算

４）得られたランダム現在価値 の RSVM による評価

５）リアルオプション・アプローチ等の戦略を考慮した評価

６）採否の判定と最適な規模の設定。

これらの手順について、順次見てゆく。

7.4.1 確率モデルの設定

評価対象となる確率的なキャッシュフロー列を発生させることになるプロジェクトなどを、確率モデルとして設定すること。その中にはリアルオプション・アプローチとしての戦略が含まれているので、可能な戦略（コントロール）の構造を明確にしたうえで確率的最適制御理論を適用できる構造を持つものとして定式化することになる。（モデルの構築に関しては、第８章で詳しく見る。）

7.4.2 採用すべきリスク回避度の決定

リスク鋭感的価値尺度法の適用のためには、採用すべきリスク回避度を設定した上でそれに対応した価値尺度を採用することになる。（リスク回避度の推定法については、第９章で論じる。）

なお、リスク回避度を１つの数値に設定することが困難な場合には、ある幅を持たせて考察することも考えられる。さらに、リスク回避度に重み $f(\alpha)$ を付けた平均値

$$\frac{\int_{a_1}^{a_2} U^{(\alpha)}(X) f(\alpha) d\alpha}{\int_{a_1}^{a_2} f(\alpha) d\alpha} \tag{7.22}$$

を導入することも考えられる。

7.4.3 ランダム現在価値の計算

ランダムなキャッシュフロー $\mathbf{C} = \{C_0, C_1, \cdots, C_T\}$ の評価には、まずランダム現在価値

$$RPV(\mathbf{C}) = \sum_{0}^{T} \frac{C_t}{(1+r)^t} \tag{7.23}$$

を計算することが必要である。その際には、割引率 r を選定しておかねばならない。（割引率の算定法については、第９章で考察を加える。）

7.4.4 キャッシュフローの評価

ランダム現在価値 $RPV(\mathbf{C})$ が与えられているものする。これの RSVM による評価は

$$U^{(\alpha)}(RPV(\mathbf{C})) = -\tfrac{1}{\alpha} \log E[e^{-\alpha RPV(\mathbf{C})}], \quad \alpha > 0, \tag{7.24}$$

$$RPV(\mathbf{C}) = \textstyle\sum_0^T \frac{C_t}{(1+r)^t} \tag{7.25}$$

で与えられる。

7.4.5　リアルオプション・アプローチの導入

リアルオプション・アプローチ等の戦略を導入した場合の RSVM の計算
・プロジェクトの推進過程でなされる選択（プロジェクトの延期、拡大、中止、等）は付加的なオプションと看做せる。
・複合的なオプションを柔軟に適用することによりプロジェクトの価値が高まる可能性がある。

・この考え方を拡張して、「リスク鋭感的最適確率制御」の問題に行き着く。

7.4.6　最適戦略の選択

最適化問題

$$\overline{V} = \sup_{\Phi} \left\{ -\frac{1}{\alpha} \log E[e^{-\alpha \sum_{t=0}^{T} \tilde{C}_t^{(\Phi)}}] \right\} \tag{7.26}$$

を解くことである。

7.4.7　採否の判定と最適な規模の設定

上で得られた最適な戦略下での評価値 $\overline{V}$ に基づき、そのプロジェクト（あるいは投資）を実行するか否かを判定する。さらに、必要ならプロジェクト（あるいは投資）の最適な規模を決定する。

7.5　動学的リスク鋭感的価値尺度法の適用に関する検討課題

7.1 節で述べたように、動学的リスク鋭感的価値尺度 $\{U_t^{(\alpha)}(X), t = 0, 1, \cdots, T\}$ はプロジェクトの評価のための尺度として非常に優れており、これとリアルオプション・アプローチの手法とを組み合わせて得られる「リスク鋭感的価値尺度法」は、リスク鋭感的最適制御理論とも関連して、優れた評価法になっていると言える。ただしこの評価法の適用に当たっては検討すべき課題もある。

第一の課題は、モデルの設定法である。すなわち、リスク鋭感的最適コントロールの手法が適用できる形にモデル設定を適切に行う問題である。これは、個々の具体的な事例に応じて検討していかなければならない問題であるが、ある程度一般的な設定法を議論することはできる。（第 8 章を参照せよ。）

第二の課題は、リスク回避度 α の算定である。これは事業等の主体である企業や個人のリスクへの態度を反映したパラメーターであり、個々の企業や個人に特有のものと考えられる。リスク鋭感的価値尺度法の適用に当たっては、このリスク回避度 α の値が既定値として与えられていることが前提となっている。しかし、これをどう算出するかについては、まだ手探りの状態であり、いくつかの方法が検討されている段階である。（第 9 章を参照せよ。）

第三の課題は、ランダム現在価値（RPV）を算定するための割引率の設定である。この課題は我々の問題に限ったものではなく、キャッシュフローの価値を評価章とする場合には常に現れる問題であるが、リスク鋭感的価値尺度法を適用しようという場合にも検討しておくべき課題の一つである。（第 9 章を参照せよ。）

第８章　動学的リスク鋭感的価値尺度による プロジェクトの評価

本節ではリスク鋭感的価法によるプロジェクトの評価法を説明し、さらにこの評価法の利点および検討すべき問題点などについても考察する。

前章の §7. 4 にまとめた様に、「リスク鋭感的価値尺度法の適用手順」は次のようになる。

１）確率モデルの設定
２）ランダムなキャッシュフローのランダムな現在価値の計算
３）採用すべきリスク回避度の決定
４）得られたランダム現在価値 RPV の RSVM による評価
５）リアルオプション・アプローチ等の戦略を考慮した評価
６）採否の判定と最適な規模の設定。

これらの事項について、その適用法を詳しく見てゆく。

8.1　プロジェクト評価モデルの構築法

§3.5 および §7.5 で述べたように、リスク鋭感的確率制御の問題と同様の形に定式化できることが求められている。特に、マルコフ過程に対する最適制御の問題に定式化できると、扱い易い。

モデル設定においては、評価対象の確率過程（キャッシュフロー列）がどのような構造に基づいて発生しているかにより複雑さが変わってくる。一つの閉じた系として扱える場合と、外部要因が関係してくる場合とを想定できる。モデルの構造について、離散時間のマルコフ過程の枠内で簡単に説明する。

以下の議論では、確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ と フィルとレーション $\mathcal{F}_t,\ t=0,\cdots,T,\ \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F},$ が与えられているものとし、確率変数および確率過程はこの上で定義されているものとする。

8.2　マルコフ的確率制御理論モデル

まず、外部の要因を考慮しなくてよい閉じた系として構築して良い対象について見ることにする。最も簡単な場合として、対象の状態空間および戦略の空間が有限である場合を考察する。この場合、次のような形にモデル化することが一つの雛型と言えよう。

8.2.1 確率モデルの設定

まずは評価対象となる確率的なキャッシュフロー列の元になるプロジェクトを確率モデルとして設定することが必要である。その中にはリアルオプション・アプローチとしての戦略が含まれているので、可能な戦略（コントロール）の構造を明確にしたうえで確率的最適制御理論を適用できる構造を持つものとして定式化することになる。簡単なモデルとして、次のようなものが考えられる。

・系の状態空間：

$$\mathcal{S}^{(X)} = \{s_1, s_2, \cdots, s_n\} \tag{8.1}$$

・戦略（コントロール）の状態空間:

$$\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \cdots, a_d\} \tag{8.2}$$

・戦略過程：

$$\Phi = \{\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_T\}, \tag{8.3}$$

$$\phi_t : \mathcal{S}^{(X)} \to \mathcal{A} \tag{8.4}$$

・内的マルコフ過程（内部的不確実性の表現）:

$$\{Z_t,\ t = 1, \cdots, T\}, \tag{8.5}$$

・系の状態過程（制御マルコフ過程）:

$$X_t^{(\Phi)} = g(t, X_{t-1}^{(\Phi)}, Z_t, \phi_t(X_{t-1}^{(\Phi)}))\ \in \mathcal{S}^{(X)}, \qquad t = 1, \cdots, T \tag{8.6}$$

ここで、
(1) $X_0^{(\Phi)} = X_0\ (\in \mathcal{S}^{(X)})$ は与えられた初期値
(2) $\phi_t(X_{t-1}^{(\Phi)}) \in \mathcal{A},\ t = 1, \cdots, T$ は $\mathcal{F}_t$-可予測な戦略,
(3) $X_t^{(\Phi)} \in \mathcal{S}^{(X)},\ t = 0, \cdots, T$ は $\mathcal{F}_t$-適合的なマルコフ過程、
となっている。

評価対象のキャッシュフロー列は、系の状態過程 $\{X_t^{(\Phi)}\}$ から

$$C_0^{(\Phi)} = C_0 = f_0(X_0), \tag{8.7}$$

$$C_t^{(\Phi)} = f(t, X_t^{(\Phi)}, \phi_t(X_{t-1}^{(\Phi)})), \quad t = 1, \cdots, T \tag{8.8}$$

として定まる。

8.2.2 キャッシュフローのランダム現在価値の計算

ランダムなキャッシュフロー

$$\mathbf{C}^{(\Phi)} = \{C_0^{(\Phi)}, C_1^{(\Phi)}, \cdots, C_T^{(\Phi)}\} \tag{8.9}$$

の割引キャッシュフロー（現在価値に直したもの）

$$\tilde{\mathbf{C}}^{(\Phi)} = \{\tilde{C}_0, \tilde{C}_1^{(\Phi)}, \cdots, \tilde{C}_T^{(\Phi)}\} \tag{8.10}$$

は

$$\tilde{C}_0^{(\Phi)} = C_0, \quad \tilde{C}_t^{(\Phi)} = C_t^{(\Phi)}/(1+r)^t, \; t = 1, \cdots, T. \tag{8.11}$$

で与えられる。そしてランダム現在価値は

$$RPV(\mathbf{C}^{(\Phi)}) = \sum_{t=0}^{T} \tilde{C}_t^{(\Phi)} \tag{8.12}$$

である。

ここで市場金利 r をどのように推定するかが課題になるが、国債の金利体系を元にして推定することが一般的であろう。また、r をランダムなものとして、時系列 $\{r_t\}$ とすることもありうる。

8.2.3 リアルオプション・アプローチの導入

プロジェクトの推進過程でなされる選択（プロジェクトの延期、拡大、中止、等）は付加的なオプションと看做せる。複合的なオプションを考えると、それらは戦略として捉えられる。戦略を柔軟に適用することによりプロジェクトの価値が高まる可能性がある。これがリアルオプション・アプローチである。

すなわち、リアルオプション・アプローチの導入とは戦略 $\Phi = \{\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_T\}$ の導入のことである。その時、最適な戦略によるプロジェクトの価値が当該プロジェクトの価値であり、その値は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \overline{V} &= \sup_{\Phi} \left\{ U^{(\alpha)} \left(\sum_{t=0}^{T} \tilde{C}_t^{(\Phi)} \right) \right\} \\ &= \sup_{\Phi} \left\{ -\frac{1}{\alpha} \log E \left[e^{-\alpha \sum_{t=0}^{T} \tilde{C}_t^{(\Phi)}} \right] \right\} \end{aligned} \tag{8.13}$$

前章でみたように動学的リスク鋭感的価値尺度は時間整合的であったことから、この $\overline{V}$ の値は次のような形に表現できる。

$$\begin{aligned} \overline{V} &= \tilde{C}_0^{(\Phi)} + \sup_{\phi_1} \left\{ U_0^{(\alpha)} \left(\tilde{C}_1^{(\Phi)} + \sup_{\phi_2} \left\{ U_1^{(\alpha)} \left(\tilde{C}_2^{(\Phi)} + \cdots \right.\right.\right.\right. \\ &\quad \left.\left.\left.\left. \cdots + \sup_{\phi_{T-1}} \left\{ U_{T-2}^{(\alpha)} \left(\tilde{C}_{T-1}^{(\Phi)} + \sup_{\phi_T} \left\{ U_{T-1}^{(\alpha)} \left(\tilde{C}_T^{(\Phi)} \right) \right\} \right) \right\} \cdots \right) \right\} \right) \right\}. \end{aligned} \tag{8.14}$$

そして、$\{\overline{V}_t^{(\Phi)},\ t = T, T-1, \cdots, 0\}$ は次のように再帰的に計算される。

$$\overline{V}_T^{(\Phi)} = \tilde{C}_T^{(\Phi)} \tag{8.15}$$

$$\overline{V}_{T-1}^{(\Phi)} = \tilde{C}_{T-1}^{(\Phi)} + \sup_{\phi_T} U_{T-1}^{(\alpha)}\left(\overline{V}_T^{(\Phi)}\right) \tag{8.16}$$

$$\cdots$$

$$\overline{V}_t^{(\Phi)} = \tilde{C}_t^{(\Phi)} + \sup_{\phi_{t+1}} U_t^{(\alpha)}\left(\overline{V}_{t+1}^{(\Phi)}\right) \tag{8.17}$$

$$\cdots$$

$$\overline{V}_0^{(\Phi)} = \tilde{C}_0^{(\Phi)} + \sup_{\phi_1} U_0^{(\alpha)}\left(\overline{V}_1^{(\Phi)}\right) \tag{8.18}$$

こうして得られた $\overline{V}_0^{(\Phi)}$ が、初期状態 X_0 を指定した上で最適戦略を採用した場合のプロジェクトの価値 $\overline{V}$ である。

注 8.1 いまの場合、*Bellman* 型の逆向き方程式は、明示的には次のようにも表現できる。

$$\overline{V} = \tilde{C}_0^{(\Phi)} - \frac{1}{\alpha}\log\left(\inf_{\phi_1}\left\{E\left[e^{-\alpha\tilde{C}_1^{(\Phi)}}\inf_{\phi_2}\{E\,[\ \cdots\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.\cdots\ \inf_{\phi_T}\left\{E\left[e^{-\alpha\tilde{C}_T^{(\Phi)}}|\mathcal{F}_{T-1}\right]\right\}\cdots|\mathcal{F}_1\right]\right\}\right]\right\}\right). \tag{8.19}$$

8.2.4　採否の判定と最適な規模の設定

プロジェクトを実行するか否かの判断は、上で得られた $\overline{V}$ の値を見てなされることになる。リアルオプション・アプローチを導入した結果として、それがないときには低い評価であったプロジェクトも、柔軟な戦略を導入した結果高い評価となり実行する価値が認められることも有りうる。

さらに、初期状態 X_0（あるいは初期投資額 $I_0 = -C_0$）を変化させて評価することにより、プロジェクト（あるいは投資）の最適な規模を決定することが可能である。

8.3　外部要因がある場合のモデル設定

需要量の変化や原料・エネルギーの価格変動などの外部要因を考慮に入れたモデル化が必要な場合も多い。そのような場合には、上で見たモデル化をもとに、外部要因を反映したプロセスを導入して修正を施すことにより、以下のようなモデル化が考えられる。

8.3.1　基本構造

・系の状態空間： $\mathcal{S}^{(X)} = \{s_1, s_2, \cdots, s_n\}$.
・内的マルコフ過程： $\{Z_t^{(in)},\ t = 0, \cdots, T\},\ \mathcal{F}_t -$ 適合的なマルコフ過程.
・外的要因過程の状態空間： $\mathcal{S}^{(Y)}$.
・外的要因過程： $\{Y_t,\ t = 0, 1, \cdots, T\},\ \mathcal{S}^{(Y)}$上の $\mathcal{F}_t -$ 適合的なマルコフ過程.

・戦略（コントロール）の状態空間: $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \cdots, a_d\}$.
・戦略過程： $\Phi = \{\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_T\}$, $\phi_t : \mathcal{S}^{(X)} \times \mathcal{S}^{(Y)} \to \mathcal{A}$.
・系の状態過程（制御マルコフ過程）:

$$X_t^{(\Phi)} = g(t, X_{t-1}^{(\Phi)}, Z_t^{(in)}, \phi_t(X_{t-1}^{(\Phi)}, Y_{t-1})),\ t = 1, \cdots, T. \tag{8.20}$$

ここで、
$X_0^{(\Phi)} = X_0 \in \mathcal{S}^{(X)}$：与えられた初期状態、
$\phi_t(X_{t-1}^{(\Phi)}, Y_{t-1}),\ t = 1, \cdots, T$：$\mathcal{F}_t$-可予測な戦略、
である。

評価対象のキャッシュフロー列 $\mathbf{C}^{(\Phi)} = \{C_0^{(\Phi)}, C_1^{(\Phi)}, \cdots, C_T^{(\Phi)}\}$ は、系の状態過程 $\{X_t^{(\Phi)}\}$ と外部要因過程 $\{Y_t\}$ から
・初期投資額：$I_0 = I_0(X_0, Y_0)$,
・キャッシュフロー列：
$C_0^{(\Phi)} = C_0 = -I_0 = -I_0(X_0, Y_0)$,
$C_t^{(\Phi)} = f(t, X_t^{(\Phi)}, \phi_t(X_{t-1}^{(\Phi)}, Y_{t-1}), Y_t); t = 1, \cdots, T$,
として定まる。さらに
・割引キャッシュフロー列 ：$\tilde{\mathbf{C}}^{(\Phi)} = \{\tilde{C}_0, \tilde{C}_1^{(\Phi)}, \cdots, \tilde{C}_T^{(\Phi)}\}$、$C_t^{(\Phi)}/(1+r)^t,\ t = 0, \cdots, T$,
および
・ランダム現在価値: $RPV(\mathbf{C}^{(\Phi)}) = \sum_{t=0}^{T} \tilde{C}_t^{(\Phi)}$,
が定まり、その価値が $U^{(\alpha)}(RPV(\mathbf{C}^{(\Phi)}))$ で与えられる。そして、

$$\overline{V} = \sup_{\Phi} U^{(\alpha)}(RPV(\mathbf{C}^{(\Phi)}))$$

が最適な戦略の下でのプロジェクトの価値となる。

外部要因の例としては、プロジェクトで使用する投入財の価格過程やエネルギーの価格過程がある。また、景気の状態も外部要因の一つと考えられる。このタイプのモデル化の応用例としては、[18] で扱われた設備の維持管理の評価、などの問題がある。

8.3.2 例による検討

上で基本構造を説明したが、必ずしもイメージとして明確ではないかもしれない。そこで具体性のある例に即してモデル設定を実行してみることにする。

例 8.1 ある商品を生産する場合に、適切な産出量を状況に応じて調整していく問題を取り上げてみることにする。系の状態変数 X は生産量を示すものとし、外的要因過程 Y として需要量を想定し、需要量を見ながら生産量を調整して行くプロジェクトを想定する。

このプロジェクト例をモデル化してみよう。
モデルの構造は以下に述べるように構成する。（記号は前節のものを援用して使うようにする。）

・内的不確実性を引き起こす要因のマルコフ過程を $\{Z_t^{(in)},\ t=1,\cdots,T\}$ で示す。(生産要素の機能の状態を示しているものとする。) $\{Z_t^{(in)},\ t=1,\cdots,T\}$ は i.i.d. で

$$P(Z_t^{(in)}=1)=p^{(in)}, \quad P(Z_t^{(in)}=e^{-0.1})=1-p^{(in)}, \quad t=1,2,\cdots,T \tag{8.21}$$

となるように構成する。

・外的要因過程 $Y_t,\ t=0,1,\cdots,T,$ (需要量とする) は、Y_0 を与えられた初期値として、

$$Y_t=Y_{t-1}\times Z_t^{(out)}, \quad t=1,2,\cdots,T \tag{8.22}$$

と定まるとしよう。ただし、 $\{Z_t^{(out)},\ t=1,\cdots,T\}$ は外的不確実性を引き起こす要因のマルコフ過程で、 $\{Z_t^{(out)},\ t=1,\cdots,T\}$ は i.i.d. で

$$P(Z_t^{(out)}=e^{0.1})=p^{(out)}, \quad P(Z_t^{(out)}=e^{-0.1})=1-p^{(out)}, \quad t=1,2,\cdots,T \tag{8.23}$$

となるように構成する。さらに、内的要因と外的要因とは独立とし、

・$Z^{(in)}$ と $Z^{(out)}$ は独立

となるように構成する。

確率過程 $\{(Z_t^{(in)},Z_t^{(out)}),t=1,2,\cdots,T\}$ が基礎となる確率過程である。この確率過程の定義されている確率空間を $(\Omega,\mathcal{F},P)$ とし、フィルとレーションを $\{\mathcal{F}_t,t=0,1,\cdots,T\}$ とする。

・戦略は生産量の調整 (増産、現状維持、減産、の 3 つ) とし、

$$\mathcal{A}=\{a_1,a_2,a_3\}=\{e^{0.1},1,e^{-0.1}\} \tag{8.24}$$

とする。ここで、$a_1=e^{0.1}$ は生産量を a_1 倍に増産する戦略であり、 $a_2=1$ は現状維持、 $a_3=e^{-0.1}$ は a_3 倍に減産する戦略である。

戦略過程 $\Phi=\{\phi_1,\phi_2,\cdots,\phi_T\}$ は

$$\phi_t:\mathcal{S}^{(X)}\times\mathcal{S}^{(Y)}\to\mathcal{A} \tag{8.25}$$

であり、系の内的状態過程 (制御マルコフ過程) $\{X_t^{(\Phi)},\ t=0,1,\cdots,T\}$ (産出量とする) は、$X_0^{(\Phi)}=X_0$ を与えられた初期状態として

$$X_t^{(\Phi)}=X_{t-1}^{(\Phi)}\times\phi_t(X_{t-1}^{(\Phi)},Y_{t-1})\times Z_t^{(in)},\ t=1,\cdots,T \tag{8.26}$$

により定まっているものとする。

系全体の状態過程は系の内的状態過程 $\{X_t^{(\Phi)}\}$ と外部要因過程 $\{Y_t\}$ とを合わせた $\{(X_t^{(\Phi)},Y_t),\ t=0,1,\cdots,T\}$ である。 ここで、状態過程 $\{(X_t^{(\Phi)},Y_t),\ t=0,1,\cdots,T\}$ はマルコフ過程になっていることを注意しておこう。

評価対象のキャッシュフロー列 $\mathbf{C}^{(\Phi)}=\{C_0^{(\Phi)},C_1^{(\Phi)},\cdots,C_T^{(\Phi)}\}$ は、初期投資額 $I_0^{(\Phi)}=I_0=I_0(X_0,Y_0)$ が与えられているものとした上で、

$$C_0^{(\Phi)} = C_0=-I_0=-I_0(X_0,Y_0) \tag{8.27}$$

$$C_t^{(\Phi)} = \min(X_t^{(\Phi)},Y_t)\times price-X_t^{(\Phi)}\times cost-const, \quad t=1,\cdots,T \tag{8.28}$$

として定まるものとしよう。ここで、const は固定コストである。

上式において、$C_t^{(\Phi)}$ は状態過程 $\{(X_t^{(\Phi)}, Y_t),\ t = 0, 1, \cdots, T\}$ の t 期の値のみに依存して決まっていることを注意しておこう。すなわち

$$C_t^{(\Phi)} = C_t^{(\Phi)}(X_t^{(\Phi)}, Y_t),\ t = 0, 1, \cdots, T \tag{8.29}$$

となっている。

このキャッシュフローのリスク鋭感的価値 $V_0^{(\Phi)}(X_0, Y_0)$ は次式で与えられる。

$$V_0^{(\Phi)}(X_0, Y_0) = U^{(\alpha)}(RPV(\mathbf{C}^{(\Phi)})), \tag{8.30}$$

$$RPV(\mathbf{C}^{(\Phi)}) = \sum_{t=0}^{T} \tilde{C}_t^{(\Phi)} = \sum_{t=0}^{T} \frac{C_t^{(\Phi)}}{(1+r)^t}. \tag{8.31}$$

そして、初期状態が (X_0, Y_0) のときのプロジェクトの価値 $\overline{V}(X_0, Y_0)$ は最適戦略を採用した場合の価値ということであり、

$$\overline{V}(X_0, Y_0) = \sup_{\Phi} V_0^{(\Phi)}(X_0, Y_0) \tag{8.32}$$

である。

この値を求めるには、§8.2.3 で見たように、RSVM の時間的整合性を使って逆向きに再帰的に求めることになる。

$$\begin{aligned}\overline{V}(X_0, Y_0) \quad = \quad & \tilde{C}_0^{(\Phi)} + \sup_{\phi_1} \left\{ U_0^{(\alpha)} \left(\tilde{C}_1^{(\Phi)} + \sup_{\phi_2} \left\{ U_1^{(\alpha)} \left(\tilde{C}_2^{(\Phi)} + \cdots \right.\right.\right.\right.\\ & \left.\left.\left.\left. \cdots + \sup_{\phi_{T-1}} \left\{ U_{T-2}^{(\alpha)} \left(\tilde{C}_{T-1}^{(\Phi)} + \sup_{\phi_T} \left\{ U_{T-1}^{(\alpha)} \left(\tilde{C}_T^{(\Phi)} \right) \right\} \right) \right\} \cdots \right) \right\} \right) \right\}\end{aligned} \tag{8.33}$$

そして、$\{\overline{V}_t^{(\Phi)},\ t = T, T-1, \cdots, 0\}$ を次のように再帰的に計算する。

$$\overline{V}_T^{(\Phi)} = \tilde{C}_T^{(\Phi)} \tag{8.34}$$

$$\overline{V}_{T-1}^{(\Phi)} = \tilde{C}_{T-1}^{(\Phi)} + \sup_{\phi_T} U_{T-1}^{(\alpha)} \left(\overline{V}_T^{(\Phi)} \right) \tag{8.35}$$

$$\cdots$$

$$\overline{V}_t^{(\Phi)} = \tilde{C}_t^{(\Phi)} + \sup_{\phi_{t+1}} U_t^{(\alpha)} \left(\overline{V}_{t+1}^{(\Phi)} \right) \tag{8.36}$$

$$\cdots$$

$$\overline{V}_0^{(\Phi)} = \tilde{C}_0^{(\Phi)} + \sup_{\phi_1} U_0^{(\alpha)} \left(\overline{V}_1^{(\Phi)} \right) \tag{8.37}$$

ここで、$\overline{V}_t^{(\Phi)}$ の計算において、次のことを注意しよう。

まず、$C_T^{(\Phi)}$ は $(X_T^{(\Phi)}, Y_T)$ にのみ依存して決まっているので、$\overline{V}_T^{(\Phi)}$ を $\overline{V}_T^{(\Phi)}(X_T^{(\Phi)}, Y_T)$ と記すことにする。

次いで $\overline{V}^{(\Phi)}_{T-1}$ について見る。$T-1$ 期の系の状態 $(X^{(\Phi)}_{T-1}, Y_{T-1})$ が与えられたという条件の下では

$$\begin{aligned}\overline{V}^{(\Phi)}_{T-1} &= \tilde{C}^{(\Phi)}_{T-1} + \sup_{\phi_T} U^{(\alpha)}_{T-1}\left(\overline{V}^{(\Phi)}_{T}\right) \\ &= \tilde{C}^{(\Phi)}_{T-1}(X^{(\Phi)}_{T-1}, Y_{T-1}) + \sup_{\phi_T}\left\{-\frac{1}{\alpha}\log\left(\overline{V}^{(\Phi)}_{T}(X^{(\Phi)}_{T}, Y_T)|\mathcal{F}_{T-1}\right)\right\} \quad (8.38)\end{aligned}$$

$$(8.39)$$

は、状態過程 $\{(X^{(\Phi)}_t, Y_t),\ t=0,1,\cdots,T\}$ のマルコフ性より、$(X^{(\Phi)}_{T-1}, Y_{T-1})$ のみの関数となるので、$\overline{V}^{(\Phi)}_t(X^{(\Phi)}_{T-1}, Y_{T-1})$ と表現できる。以下同様にして、

$$\overline{V}^{(\Phi)}_t = \overline{V}^{(\Phi)}_t(X^{(\Phi)}_t, Y_t), \qquad t = T, T-1, \cdots, 0. \quad (8.40)$$

である。

以上の状況を踏まえた $\overline{V}(X_0, Y_0)$ の計算法を、数値計算例として次に示そう。

8.3.3 数値計算例

計算を簡単にするために、$r=0$ としておく。

$p^{(in)} = 0.9$ とする。マルコフ過程 $\{Z^{(in)}_t,\ t=1,\cdots,T\}$ （生産要素の機能の状態を示しているものとする。） は i.i.d. で

$$\begin{aligned}P(Z^{(in)}_t = 1) &= p^{(in)} = 0.9, \quad (8.41)\\ P(Z^{(in)}_t = e^{-0.1}) &= 1 - p^{(in)} = 0.1 \quad (8.42)\end{aligned}$$

となっている。

$p^{(out)} = 0.6$ とする。 $\{Z^{(out)}_t,\ t=1,\cdots,T\}$ は i.i.d. で

$$\begin{aligned}P(Z^{(out)}_t = e^{0.1}) &= p^{(out)} = 0.6, \quad (8.43)\\ P(Z^{(out)}_t = e^{-0.1}) &= 1 - p^{(out)} = 0.4 \quad (8.44)\end{aligned}$$

となる。

内部不確定要因 $Z^{(in)}$ と外部不確定要因 $Z^{(out)}$ は独立としているので、

$$\begin{aligned}P(Z^{(in)}_t = 1,\ Z^{(out)}_t = e^{0.1}) &= p^{(in)} \times p^{(out)} = 0.54, \quad (8.45)\\ P(Z^{(in)}_t = 1,\ Z^{(out)}_t = e^{-0.1}) &= p^{(in)} \times (1 - p^{(out)}) = 0.36, \quad (8.46)\\ P(Z^{(in)}_t = e^{-0.1},\ Z^{(out)}_t = e^{0.1}) &= (1 - p^{(in)}) \times p^{(out)} = 0.06, \quad (8.47)\\ P(Z^{(in)}_t = e^{-0.1},\ Z^{(out)}_t = e^{-0.1}) &= (1 - p^{(in)}) \times (1 - p^{(out)}) = 0.04, \quad (8.48)\end{aligned}$$

となっている。

外的要因過程：$Y_t,\ t=0,1,\cdots,T,$ （需要量とする。） は、初期値

$$Y_0 = e^{50\times 0.1} \quad (8.49)$$

が与えられたとし、以下 $Y_t = Y_{t-1} \times Z_t^{(out)}$ より

$$P(Y_t = Y_{t-1} \times e^{0.1}) = p^{(out)} = 0.6, \tag{8.50}$$
$$P(Y_t = Y_{t-1} \times e^{-0.1}) = 1 - p^{(out)} = 0.4 \tag{8.51}$$

となっている。

$Y_t,\ t = 0, 1, \cdots, T$ のとりうる値は、$\{e^{k \times 0.1},\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$ の中にあるので、

$$\mathcal{S}^{(Y)} \subset \{e^{k \times 0.1},\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\} \tag{8.52}$$

となっている。

・戦略過程 $\Phi = \{\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_T\}$ は

$$\phi_t : \mathcal{S}^{(X)} \times \mathcal{S}^{(Y)} \to \mathcal{A} = \{a_1, a_2, a_3\} = \{e^{0.1}, 1, e^{-0.1}\} \tag{8.53}$$

であり、系の内的状態過程（制御マルコフ過程） $\{X_t^{(\Phi)},\ t = 0, 1, \cdots, T\}$ （産出量とする） は、

$$X_0^{(\Phi)} = e^{50 \times 0.1} \tag{8.54}$$

を与えられた初期状態として

$$X_t^{(\Phi)} = X_{t-1}^{(\Phi)} \times \phi_t(X_{t-1}^{(\Phi)}, Y_{t-1}) \times Z_t^{(in)},\ t = 1, \cdots, T \tag{8.55}$$

で与えられているものとする。

上の条件から、 $\{X_t^{(\Phi)},\ t = 0, 1, \cdots, T\}$ のとりうる値は $\{e^{k \times 0.1},\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$ の中にあることになり、

$$\mathcal{S}^{(X)} \subset \{e^{k \times 0.1},\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\} \tag{8.56}$$

となっている。

状態過程の t 期の状態は $(X_t^{(\Phi)}, Y_t) \in \mathcal{S}^{(X)} \times \mathcal{S}^{(Y)}$ であり、評価対象のキャッシュフロー列 $\mathbf{C}^{(\Phi)} = \{C_0^{(\Phi)}, C_1^{(\Phi)}, \cdots, C_T^{(\Phi)}\}$ は、

$$price = 10, \quad cost = 5, \quad const = 100 \tag{8.57}$$

とし、初期投資額を 500 として、次のように定まる。

$$C_0^{(\Phi)} = -I_0^{(\Phi)} = -I_0(X_0^{(\Phi)}, Y_0) = -500 \tag{8.58}$$
$$C_t^{(\Phi)} = \min(X_t^{(\Phi)}, Y_t) \times 10 - \hat{X}_t \times 5 - 100, \quad t = 1, \cdots, T. \tag{8.59}$$

と定まる。

簡単のために $r = 0$ としていたので、このキャッシュフローのリスク鋭感的価値 $V_0^{(\Phi)}(X_0, Y_0)$ は次式で与えられる。

$$RPV(\mathbf{C}^{(\Phi)}) = \sum_{t=0}^{T} C_t^{(\Phi)} \tag{8.60}$$
$$V_0^{(\Phi)}(X_0, Y_0) = U^{(\alpha)}(RPV(\mathbf{C}^{(\Phi)}). \tag{8.61}$$

この値は、戦略 Φ が一つ指定された上では直接計算することも容易である。しかし、プロジェクトの価値 $\overline{V}(X_0, Y_0)$ は最適戦略を採用した場合のキャッシュフローの価値であるので、

$$\overline{V}(X_0, Y_0) = \sup_{\Phi} V_0^{(\Phi)}(X_0, Y_0) \tag{8.62}$$

であり、直接計算してその sup を求めるのは、かなりの計算量になる。（モデルによっては、有限回の計算では求まらなくなる。）

そこで、すでに説明したように、 RSVM の時間的整合性を使った計算法が有効になる。すなわち

$$\begin{aligned}
\overline{V}_T^{(\Phi)}(X_T^{(\Phi)}, Y_T) &= C_T^{(\Phi)}(X_T^{(\Phi)}, Y_T) && (8.63)\\
\overline{V}_{T-1}^{(\Phi)}(X_{T-1}^{(\Phi)}, Y_{T-1}) &= C_{T-1}^{(\Phi)}(X_{T-1}^{(\Phi)}, Y_{T-1}) + \sup_{\phi_T} U_{T-1}^{(\alpha)}\left(\overline{V}_T^{(\Phi)}(X_T^{(\Phi)}, Y_T)\right) && (8.64)\\
&\cdots \\
\overline{V}_t^{(\Phi)}(X_t^{(\Phi)}, Y_t) &= C_t^{(\Phi)}(X_t^{(\Phi)}, Y_t) + \sup_{\phi_{t+1}} U_t^{(\alpha)}\left(\overline{V}_{t+1}^{(\Phi)}(X_{t+1}^{(\Phi)}, Y_{t+1})\right) && (8.65)\\
&\cdots \\
\overline{V}_0^{(\Phi)}(X_0^{(\Phi)}, Y_0) &= C_0^{(\Phi)}(X_0^{(\Phi)}, Y_0) + \sup_{\phi_1} U_0^{(\alpha)}\left(\overline{V}_1^{(\Phi)}(X_1^{(\Phi)}, Y_1)\right) && (8.66)
\end{aligned}$$

を順次求めることである。最後に得られた $\overline{V}_0^{(\Phi)}(X_0^{(\Phi)}, Y_0)$ の値が $\overline{V}(X_0, Y_0)$ である。

以下でこれの数値例を計算してみる。

[1 期間モデル（$T = 1$ の場合）]

まづ 1 期間モデル（= 2 期モデル）を考察する（$t = 0, 1$ $(T = 1)$ という場合である)。$(X_1^{(\Phi)}, Y_1)$ のとりうる値は $\{(e^{j\times 0.1}, e^{k\times 0.1}), j = 51, 50, 49, 48,\ k = 51, 49\}$ の 8 個の点であり、その各点での $C_1^{(\Phi)}(X_1^{(\Phi)}, Y_1)$ の値は、(8.59) 式より求まる。そして、最終時間が $T = 1$ であるから

$$\overline{V}_1^{(\Phi)}(X_1^{(\Phi)}, Y_1) = C_1^{(\Phi)}(X_1^{(\Phi)}, Y_1) \tag{8.67}$$

である。

次いで、(8.66) 式により $\overline{V}_0^{(\Phi)}(X_0^{(\Phi)}, Y_0)$ を求める。まづ各戦略ごとに $V_0^{(\phi_1)}(e^{50\times 0.1}, e^{50\times 0.1})$ の値をもとめて、つぎの結果を得る。

$$V_0^{(a_1)}(e^{50\times 0.1}, e^{50\times 0.1}) \fallingdotseq 11 \tag{8.68}$$
$$V_0^{(a_2)}(e^{50\times 0.1}, e^{50\times 0.1}) \fallingdotseq 62 \tag{8.69}$$
$$V_0^{(a_3)}(e^{50\times 0.1}, e^{50\times 0.1}) \fallingdotseq 63 \tag{8.70}$$

したがって戦略 a_3 が採用されて

$$\overline{V}(e^{50\times 0.1}, e^{50\times 0.1}) \fallingdotseq 63 \tag{8.71}$$

となる。

[多期間モデル]

状態変数の初期値を $(X_0, Y_0) = (e^{50\times 0.1}, e^{50\times 0.1})$ としているので、$t-$ 期における状態変数 $(X_t^{(\Phi)}, Y_t)$ のとりうる値は

$$X_t^{(\Phi)} \in \{e^{50\times 0.1} \times e^{k\times 0.1},\ k = t, t-1, t-2, \cdots, 0, -1, \cdots, -2t\} \tag{8.72}$$

$$Y_t \in \{e^{50\times 0.1} \times e^{l\times 0.1},\ l = t, t-2, \cdots, -(t-2), -t\} \tag{8.73}$$

であることを、まず注意しておこう。その上で、これらの各状態に対して、その状態にあることを条件としたときのその後のキャッシュフローの最適な現在価値 $\overline{V}_t^{(\Phi)}(X_t^{(\Phi)}, Y_t)$ を求めよう。

最終時点 T においては

$$\overline{V}_T^{(\Phi)}(X_T^{(\Phi)}, Y_T) = C_T^{(\Phi)}(X_T^{(\Phi)}, Y_T) \tag{8.74}$$

である。$\overline{V}_{T-1}^{(\Phi)}(X_{T-1}^{(\Phi)}, Y_{T-1})$ は (8.64) 式により

$$\overline{V}_{T-1}^{(\Phi)}(X_{T-1}^{(\Phi)}, Y_{T-1}) \quad = \quad C_{T-1}^{(\Phi)}(X_{T-1}^{(\Phi)}, Y_{T-1}) + \sup_{\phi_T} U_{T-1}^{(\alpha)}\left(\overline{V}_T^{(\Phi)}(X_T^{(\Phi)}, Y_T)\right) \tag{8.75}$$

により計算され、以下 (8.65) 式により順次定まり、$\overline{V}_0^{(\Phi)}(X_0^{(\Phi)}, Y_0) = \overline{V}(X_0, Y_0)$ が求まる。その各過程での計算は、［1 期間モデル］での計算と同様である。

<u>$T = 2$ の場合</u> に具体的に数値を計算してみることにする。

時点 2 での可能な状態の全体は

$$X_2^{(\Phi)} \in \{e^{50\times 0.1} \times e^{k\times 0.1},\ k = 2, 1, 0, -1, -2, -3, -4\} \tag{8.76}$$

$$Y_2 \in \{e^{50\times 0.1} \times e^{l\times 0.1},\ l = 2, 0, -2\} \tag{8.77}$$

であり、$(X_2^{(\Phi)}, Y_2)$ の取り得る点は $7 \times 3 = 21$ 個である。その各点で、

$$\overline{V}_2^{(\Phi)}(X_2^{(\Phi)}, Y_2) = C_2^{(\Phi)}(X_2^{(\Phi)}, Y_2) \tag{8.78}$$

が計算される。

計算結果は次のようになる。

$$\overline{V}_2^{(\Phi)} = \begin{bmatrix} 806.3612 & 477.7704 & 208.7430 \\ 720.1095 & 564.0221 & 294.9946 \\ 642.0658 & 642.0658 & 373.0384 \\ 571.4489 & 571.4489 & 443.6553 \\ 507.5521 & 507.5521 & 507.5521 \\ 449.7359 & 449.7359 & 449.7359 \\ 397.4216 & 397.4216 & 397.4216 \end{bmatrix} \tag{8.79}$$

時点 1 での可能な状態の全体は

$$X_1^{(\Phi)} \in \{e^{50\times 0.1} \times e^{k\times 0.1},\ k = 1, 0, -1, -2\} \tag{8.80}$$

$$Y_1 \in \{e^{50\times 0.1} \times e^{l\times 0.1},\ l = 1, -1\} \tag{8.81}$$

であり、$(X_1^{(\Phi)}, Y_1)$ の取り得る点は $4 \times 2 = 8$ 個である。その各点で、$\overline{V}_1^{(\Phi)}(X_1^{(\Phi)}, Y_1)$ を計算する。$(X_1^{(\Phi)}, Y_1)$ と $\overline{V}_2^{(\Phi)}$ が与えられた上では、$\overline{V}_1^{(\Phi)}$ の計算法は 1 期間モデルの場合と同様である。結果は次のようになる。

$$\overline{V}_1^{(\Phi)} = \begin{bmatrix} 1352.4 & 1178.8 \\ 1352.4 & 1221.2 \\ 1352.4 & 1221.2 \\ 1283.0 & 1221.2 \end{bmatrix} \tag{8.82}$$

$$\phi_2 = \begin{bmatrix} a_3 & a_3 \\ a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 \\ a_1 & a_1 \end{bmatrix} \tag{8.83}$$

$\overline{V}_1^{(\Phi)}$ が得られた上では、$\overline{V}_0^{(\Phi)}$ の求め方は 1 期間モデルの場合と同じであり、次のような結果を得る。

$$\overline{V}_0^{(\Phi)} = 778.8832 \tag{8.84}$$

$$\phi_1 = a_2 \tag{8.85}$$

8.4 従来の評価法との比較

上で見た数値例のモデルについて、従来の評価法との比較を見ておこう。$T = 2$ の場合について見る。

8.4.1 単純な NPV 法

オプションとしての戦略は考えない。最初に決めた方針として、生産量は一定（すなわち、戦略は a_2 に固定）とする。評価は $E[\sum_{t=0}^{2} C_t]$ を計算することである。

$$E\left[\sum_{t=0}^{2} C_t\right] = E\left[E\left[\sum_{t=0}^{2} C_t | \mathcal{F}_1\right]\right] = C_0 + E\left[C_1 + E\left[C_2(X_2, Y_2)|\mathcal{F}_1\right]\right] \tag{8.86}$$

時点 2 での可能な状態の全体は

$$X_2 \in \{e^{50\times 0.1} \times e^{k\times 0.1},\ k = 0, -1, -2\} \tag{8.87}$$

$$Y_2 \in \{e^{50\times 0.1} \times e^{l\times 0.1},\ l = 2, 0, -2\} \tag{8.88}$$

であり、(X_2, Y_2) のとりうる点は $3 \times 3 = 9$ 個である。その各点で $C_2(X_2, Y_2)$ が計算される。

計算結果は次のようになる。

$$M_2 = C_2(X_2, Y_2) = \begin{bmatrix} 642.0658 & 642.0658 & 373.0384 \\ 571.4489 & 571.4489 & 443.6553 \\ 507.5521 & 507.5521 & 507.5521 \end{bmatrix} \tag{8.89}$$

時点 1 での可能な状態の全体は

$$X_1 \in \{e^{50\times 0.1} \times e^{k\times 0.1},\ k = 0, -1\} \tag{8.90}$$

$$Y_1 \in \{e^{50\times 0.1} \times e^{l\times 0.1},\ l = 1, -1\} \tag{8.91}$$

であり、(X_1, Y_1) のとりうる点は $2 \times 2 =$ 個である。その各点で、$M_1(X_1, Y_1)$ を計算する。

$$M_1(X_1, Y_1) = C_1(X_1, Y_1) + E\left[C_2(X_2, Y_2)|\mathcal{F}_1\right] \tag{8.92}$$

であり、結果は次のようになる。

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1277.1 & 1277.1 \\ 1207.1 & 1161.1 \end{bmatrix} \tag{8.93}$$

そして、プロジェクトの期待値は

$$M_0 = 768.2352 \tag{8.94}$$

となる。

8.4.2 リアルオプションを導入した場合の期待値

単純な NPV 法にリアルオプションを導入した場合の期待値については、次のような結果が得られる。

$$\overline{M}_2 = \begin{bmatrix} 806.3612 & 477.7704 & 208.7430 \\ 720.1095 & 564.0221 & 294.9946 \\ 642.0658 & 642.0658 & 373.0384 \\ 571.4489 & 571.4489 & 443.6553 \\ 507.5521 & 507.5521 & 507.5521 \\ 449.7359 & 449.7359 & 449.7359 \\ 397.4216 & 397.4216 & 397.4216 \end{bmatrix} \tag{8.95}$$

$$\overline{M}_1 = \begin{bmatrix} 1393.3 & 1253.2 \\ 1376.2 & 1253.2 \\ 1355.1 & 1253.2 \\ 1285.2 & 1239.2 \end{bmatrix} \tag{8.96}$$

$$\phi_2 = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 \\ a_1 & a_2 \\ a_1 & a_1 \\ a_1 & a_1 \end{bmatrix} \tag{8.97}$$

$$\overline{M}_0 = 836.2213 \tag{8.98}$$

$$\phi_1 = a_1 \tag{8.99}$$

8.4.3　リアルオプションの導入無しの RSVM

リアルオプションの導入無しに RSVM で評価した場合には、次のような結果が得られる。

$$V_2 = \begin{bmatrix} 642.0658 & 642.0658 & 373.0384 \\ 571.4489 & 571.4489 & 443.6553 \\ 507.5521 & 507.5521 & 507.5521 \end{bmatrix} \tag{8.100}$$

$$V_1 = \begin{bmatrix} 1274.4 & 1100.8 \\ 1204.9 & 1143.1 \end{bmatrix} \tag{8.101}$$

$$V_0 = 669.5709 \tag{8.102}$$

8.4.4　リアルオプションを導入した場合の RSVM

リアルオプションを導入した場合の RSVM による評価については、すでに　§8.3.3 の [多期間モデル] の中で見たように、次のような結論が得られている。

$$\overline{V}_0 = 778.8832 \tag{8.103}$$

$$\phi_1 = a_2 \tag{8.104}$$

8.4.5　考察

上で見た数値例の結果から、次のようなことが読み取れる。

・NPV 法にリアルオプションを取り入れた場合、評価は高くなる。

・NPV 法の替わりに RSVM 法で評価すると、その方が厳しい評価になる。

・RSVM 法とリアルオプション・アプローチを組み合わせることにより、単なる RSVM 法の場合よりも事業の価値は高まる。

このような状況は「リスク鋭感的価値尺度法」の優れた性質としてすでに説明してきたことであるが、数値例を見ることによりその状況がより鮮明に見えてくる。

8.5　モデルの多次元化

　ここまで一つのプロジェクトの評価を念頭に議論してきた。しかし、企業などが実際に必要となる評価の問題はその企業がかかわる複数のプロジェクトを総合的に評価することであろう。その場合には多次元化されたモデル構築が必要になる。それは同時に、総合的な経営戦略の問題としての事業ポートフォリオの議論となる。

　これについては、第１０章で扱う。

第 9 章　リスク回避度と割引率の算定法

本章では、§7.5 で述べた、動学的リスク鋭感的価値尺度を適用する上での検討課題について考察する。

9.1　リスク回避度の算定法

リスク回避度 α を推定する問題は効用関数を推定する問題とほぼ同等な問題とみなせるが、我々はリスク鋭感的価値尺度を扱っているので効用関数のクラスを指数型に限定していることになる。したがって、我々が扱おうとしている問題は効用関数の推定問題の特殊な場合ということになる。

効用関数の推定法について必ずしも定まった方法が無いのと同様に、リスク回避度の算定法についても定まったものはなく、現在検討されつつある問題と言えよう。

もしも過去のプロジェクトの採否に関する実績データがあれば、それを利用して推定する方法が考えられる。リスク回避度そのものの推定ではないが、これに関連する一つの方法が三澤 (2010)[16] で提案されており、参考になる。

ただし一般的には、この類の過去のデータを集め分析することは容易ではないだろう。本稿では、リスク鋭感的価値尺度の特徴を利用したリスク回避度の推定法をいくつか提案したい。

9.1.1　確実性等価を利用したアンケートによる算定法

リスク鋭感的価値尺度は指数型効用関数の効用無差別価値として定義された。よく知られているように、指数型効用関数の場合効用無差別価値は確実性等価と一致する。そこで、確実性等価の概念を利用してリスク回避度を算定することが考えられる。

たとえば「確率 $\frac{1}{2}$ で 0 または 1 万円を手にする宝くじ（これを X としておく）があったとして、このくじにいくらまでなら払ってよいと考えるか？」という質問をする。この答えの値は解答者の確実性等価を意味している。したがって、この答えと宝くじの RSVM の値 $U^{(\alpha)}(X)$ とが一致するようなリスク回避度 α がその解答者のリスク回避度であると判断できる。

9.1.2　最適な投資規模を利用した算定法

第 5 章 §5.2 での議論を踏まえて、最適な投資規模の存在（定理 5.4）を利用する方法が考えられる。すなわち、過去の投資実績のデータが最適な投資規模に基づいてなされたものとみなして、(5.12) 式から α を推定する。

9.1.3　内部リスク回避度（IRRA）の利用

当該企業、または個人のリスク回避度を α^* とし、過去の投資判断の実績からこの α^* の値を推定することを考える。

内部リスク回避度 $\alpha_0(X)$ の定義から、$\alpha_0(X) > \alpha^*$ ならば X は実行される可能性が有り、$\alpha_0(X) < \alpha^*$ ならば X は実行されないであろう。

過去の事業計画のうち、実行されたものを $X_1, X_2, \cdots, X_m$ とし、実行されなかったものを $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ とすると、

$$\alpha_0(X_i) > \alpha^*, \quad i = 1, 2, \cdots, m, \tag{9.1}$$

$$\alpha_0(Y_j) < \alpha^*, \quad j = 1, 2, \cdots, n, \tag{9.2}$$

となっていることが期待される。すなわち、α^* は 2 つのグループ $\{\alpha_0(X_i), i = 1, 2, \cdots, m\}$ と $\{\alpha_0(Y_j), j = 1, 2, \cdots, n\}$ とを分離している境界点になっていることが期待される。

過去のデータの数値がこのようにはっきり分離した形で得られるとは限らないが、 2 つのグループの分離点とみなせる値を推定することは出来よう。

9.1.4　規模のリスクの評価を利用した算定法

第 6 章の §6.3.1 で述べたように、内部リスク回避度 $\alpha_0(\cdot)$ と規模 λ とを組み合わせた $\alpha_0(\lambda X)$ は規模のリスクの指標になっている。このことに留意して、次のような方法が考えられる。

いま、$E[X] > 0,\ P(X < 0) > 0$ を満たすような X に対して、どのくらいの規模まで投資するかを質問する。その答えが λ_0 であったとき、 $\hat{\alpha} = \alpha_0(\lambda_0 X)$ をその投資者のリスク回避度であると算定する。（このとき、$U^{(\hat{\alpha})}(\lambda_0 X) = 0$ である。）

9.1.5　平均・分散分析との関係を利用した算定法

過去の投資判断が平均・分散分析に基づいてなされていたものと想定できるとき、過去の事業計画のうち実行されたものを $X_1, X_2, \cdots, X_m$ とし実行されなかったものを $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ として、

$$E[X_i] - \frac{1}{2}\alpha V[X_i] > 0, \quad i = 1, 2, \cdots, m, \tag{9.3}$$

$$E[Y_j] - \frac{1}{2}\alpha V[Y_j] < 0, \quad j = 1, 2, \cdots, n, \tag{9.4}$$

となっているとみなせる α の値を推定し、この α の値を当該企業のリスク回避度と算定する。

なおこの平均・分散分析との関係を使った推定法は正規分布を対象にするときに特に有用なことに留意し、次のようなアンケート方式にも応用できる。

いま正規分布している X を適当に設定し、この X に対して、どのくらいの規模まで投資するかを質問する。その答えが λ_0 であったとき、

$$E[\lambda_0 X] - \frac{1}{2}\alpha V[\lambda_0 X] = 0 \tag{9.5}$$

となる α を当該企業のリスク回避度であると算定する。

9.1.6 VaR との関係を考察

仮に、ある企業の過去におけるプロジェクトの採用、非採用の判断が VaR（たとえば $VaR_{0.95}$ ）によってなされていたとすれば、それらのプロジェクトのリターン X の評価値 $U^{(\alpha)}(X)$ を計算し、

採用された X については　$U^{(\alpha)}(X) > 0$

採用されなかった X については　$U^{(\alpha)}(X) < 0$

となるような境界値となる α を推定し、その値を当該企業のリスク回避度に採用する。

9.2 割引率の算定

何らかの方法で市場の割引率が求まっていればそれを使えばよい。一つの方法として、たとえば国債価格のデータを利用した次のような算定法が考えられる。。

t 年後の割引系数（割引要素） d_t を次のようにして求める。

いくつかある国債に対して、そのキャッシュフロー列を $\{(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \cdots, x_{T^{(k)}}^{(k)}), k = 1, 2, \cdots, K\}$、その価格を $\{\pi^{(k)}, k = 1, 2, \cdots, K\}$ として、

$$\sum_{k=1}^{K} \left(\left(\sum_{t=1}^{T^{(k)}} x_t^{(k)} d_t \right) - \pi^{(k)} \right)^2 \tag{9.6}$$

を最小にする $\{d_t, t = 1, 2, \cdots, T\}$ と定める。ここで $T = \max T^{(k)}$ である。

第10章　事業ポートフォリオの評価と戦略

10.1　事業ポートフォリオ

企業あるいは個人にとって、複数の可能な事業の中から実行すべき事業を選択する必要性はしばしば起こるであろう。そのような場合、一つの事業を選択すべき場合もあろうがいくつかの事業を連携させておこなうことを検討する必要もあろう。またある個別の事業を実行する場合でも、それに付随した関連事業を考慮する必要は出てくるであろう。このような場合の評価および戦略を考える問題は、事業ポートフォリオの問題となる。

10.2　リスク鋭感的価値尺度によ事業ポートフォリオの評価

§5.4 §6.4 で述べた、複数の事業に対する相互補完関係を考慮した評価法を見ることにしよう。以下での議論は、§8.5 で述べたように、第８章で行った単一のプロジェクトの評価の理論を多次元化して議論するすることに当たる。ただし、取りうる戦略としては初期ポートフォリオの選択のみとし、各事業の構造は初期時点で決定されており推進過程での戦略（リアルオプション・アプローチ）は当面考慮しないで議論する。

考察

・複数の事業 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ を扱う場合、$U^{(\alpha)}(X_1) + U^{(\alpha)}(X_2) + \cdots + U^{(\alpha)}(X_n)$ ではなく $U^{(\alpha)}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$ を見ることになる。ここで $X_1, X_2, \cdots, X_n$ は各事業のランダム現在価値（RPV）を表しているものとする。したがって、$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ は n-次元確率変数である。（総合的な評価は、個々の評価の和ではなく、統合されたものの評価である。）

・$U^{(\alpha)}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$ の値を高めるような事業の組み合わせを目指すことになる。

・さらに、

$$U^{(\alpha)}(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \cdots + \lambda_n X_n) \tag{10.1}$$

を高めるべく、投資対象 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ の組み合わせ（投資額）$(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ を選ぶ問題になる。これはポートフォリオ選択の問題である。

10.3　最適事業ポートフォリオの存在

対象とする事業 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ を固定した上で

$$v(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) = U^{(\alpha)}(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \cdots + \lambda_n X_n) \tag{10.2}$$

と置く。ここで $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ は n-次元空間の第 1 象限（$\lambda_i \geqq 0,\ i = 1, 2, \cdots, n$）を動くものとする。最適事業ポートフォリオを求める問題は、この関数 $v(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ の最大化問題である。

最適事業ポートフォリオの存在に関して、次のような定理が得られる。

定理 10.1 (最適事業ポートフォリオの存在定理) リスク鋭感的価値尺度より定まる次の関数

$$v(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) = U^{(\alpha)}(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \cdots + \lambda_n X_n) \tag{10.3}$$

が連続であるものとする。また、どのような事業ポートフォリオを組んでも、0 ポートフォリオ以外の事業ポートフォリオには赤字になるリスクが存在しているものとし、赤字となる確率は次式の意味で一様性を持っているものとする。

[赤字確率の一様性]　$\exists a > 0, \delta > 0$ *such that* $\forall \lambda_i \geq 0, i = 1, \cdots, n, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1,$

$$P(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \cdots + \lambda_n X_n < -a) > \delta. \tag{10.4}$$

このとき、ある一つのポートフォリオ事業 $X^{(p)}$ に対して $U^{(\alpha)}(X^{(p)}) > 0$ であるならば、最適な事業ポートフォリオが存在する。

(証明） 条件 $\lambda_i \geq 0, i = 1, \cdots, n, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ を満たす $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ を 1 つ固定した上で、 $Y = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \cdots + \lambda_n X_n$ と置く。仮定から

$$U^{(\alpha)}(\lambda Y) = -\frac{1}{\alpha} \log E[e^{-\alpha\lambda Y}] < -\frac{1}{\alpha}(\alpha\lambda a + \log\delta). \tag{10.5}$$

が言える。これより、

$$-(\alpha\lambda a + \log\delta) < 0 \tag{10.6}$$

すなわち

$$\lambda \quad > -\frac{\log\delta}{\alpha a} \tag{10.7}$$

なる λ に対して

$$U^{(\alpha)}(\lambda Y) < 0 \tag{10.8}$$

となる。これより、$v(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) = U^{(\alpha)}(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \cdots + \lambda_n X_n)$ は有界な領域

$$\left\{ (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \;\middle|\; 0 \leq \lambda_i \leq -\frac{\log\delta}{\alpha a} \right\} \tag{10.9}$$

では負の値を取っていることが分かる。したがって、 $U^{(\alpha)}(X^{(p)}) > 0$ なる $(X^{(p)}$ の存在の仮定と $U^{(\alpha)}(X)$ の凹性より、最適解がこの有界領域内に一意的に定まることが分かる。　　　Q.E.D.

10.4　最適事業ポートフォリオの近似解法

最適事業ポートフォリオの存在定理の条件が満たされているものとし、さらに $X_i, i = 1, \cdots, n$ は有界（$|X_i| < L$）とする。このとき

$$\left|\frac{\partial v}{\partial \lambda_i}\right| = \left|\frac{E[X_i e^{-\alpha\sum_{i=1}^{n}\lambda_i X_i}]}{E[e^{-\alpha\sum_{i=1}^{n}\lambda_i X_i}]}\right| \leqq \frac{E[|X_i| e^{-\alpha\sum_{i=1}^{n}\lambda_i X_i}]}{E[e^{-\alpha\sum_{i=1}^{n}\lambda_i X_i}]} \leqq L \tag{10.10}$$

が言えるので、$v(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ はリプシッツ連続となっている。したがって、最適点に十分近い点が求まれば、その点での v の値は最適値の近似値になっており、その点は近似的な最適ポートフォリオになっている。以上のことを踏まえて、以下のような議論が可能である。

$(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ 座標に幅 δ （$\delta > 0$ で小）の格子点を設定する。格子点の中で v の最大値を与える点 $\lambda^{(0)} = (\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \cdots, \lambda_n^{(0)})$ を求めればその点が近似点であり、での点での v の値が最適値の近似解である。

さらに、最適解の存在定理の証明から分かるように、v の値は原点に近い有界領域の外では負になるので、原点に近い第 1 象限内の格子点での v の値を求めれば、有限回の操作で最適な格子点が求まることになる。

10.5 例による説明

例を挙げて見ていくことにしよう。

例 10.1 (２つのプロジェクトの組み合わせ) ２つのプロジェクト X と Y があり、それらのランダム現在価値（RPV）$(X(\omega), Y(\omega))$ 、が２次元確率変数として与えられておりその同時分布が次のような離散分布になっているものとする。

$$P(X = a_i, Y = b_j) = p_{ij}, \quad i = 1, 2, \cdots, M, \quad j = 1, 2, \cdots, N \tag{10.11}$$

プロジェクト X への投資規模を λ_X、Y への投資規模を λ_Y として、事業ポートフォリオ $(\lambda_X X, \lambda_Y Y)$ の評価値

$$\begin{aligned} U^{(\alpha)}(\lambda_X X + \lambda_Y Y) &= -\frac{1}{\alpha} \log E\left[e^{-\alpha(\lambda_X X + \lambda_Y Y)}\right] \\ &= -\frac{1}{\alpha} \log\left(\sum_{i,j} p_{ij} e^{-\alpha((\lambda_X a_i + (\lambda_Y b_j)}\right) \end{aligned} \tag{10.12}$$

を最大とする (λ_X, λ_Y) が求めるものである。

次に、具体的な数値例について最適解の近似値を求めてみよう。

例 10.2 (数値例) 上の例において、$M = 3,\ N = 2$ の場合を考えることとし、(X, Y) の分布が次のように与えられているものとする。

$$\begin{gathered} P(X = -2, Y = -1) = 0.1, \quad P(X = 5, Y = -1) = 0.2 \quad P(X = 10, Y = -1) = 0.1, \\ P(X = -2, Y = 8) = 0.1, \quad P(X = 5, Y = 8) = 0.3, \quad P(X = 10, Y = 8) = 0.2. \end{gathered} \tag{10.13}$$

計算結果を以下に示す。

１．格子点を、少し粗いが、整数点の全体としておく。整数点上での $v(\lambda_X, \lambda_Y) = U^{(0.1)}(\lambda_X X + \lambda_Y Y)$ の値を計算してみる。第 1 象限内の原点に近い点での $v(\lambda_X, \lambda_Y)$ の値の表は、次のようになる。

$\delta = 1$

$\backslash\lambda_Y$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
λ_X											
0	0	3.4015	4.9479	5.2025	4.7612	3.9976	3.0954	2.1354	1.1517	0.1584	-0.8389
1	4.1869	7.3520	8.7101	8.8543	8.3597	7.5727	6.6606	5.6966	4.7112	3.7172	2.7196
2	6.4836	9.4180	10.5995	10.6432	10.1008	9.2930	8.3722	7.4046	6.4178	5.4232	4.4254
3	7.1146	9.8719	10.9227	10.8938	10.3173	9.4947	8.5677	7.5976	6.6097	5.6147	4.6167
4	6.5726	9.2184	10.1889	10.1162	9.5192	8.6878	7.7572	6.7855	5.7971	4.8018	3.8037
5	5.3321	7.9161	8.8428	8.7463	8.1383	7.3022	6.3696	5.3972	4.4084	3.4130	2.4148
6	3.7156	6.2675	7.1717	7.0631	6.4495	5.6109	4.6774	3.7045	2.7155	1.7200	0.7219
7	1.9066	4.4424	5.3353	5.2206	4.6042	3.7645	2.8304	1.8573	0.8683	-0.1273	-1.1254
8	0.0014	2.5292	3.4164	3.2987	2.6809	1.8406	0.9063	-0.0669	-1.0560	-2.0516	-3.0497
9	-1.9517	0.5721	1.4566	1.3374	0.7189	-0.1217	-1.0562	-2.0294	-3.0185	-4.0141	-5.0122

この表より、近似的な最適点は $(\lambda_X, \lambda_Y) = (3, 2)$ で近似的な最適値は $v(\lambda_X, \lambda_Y) = 10.9227$ である。

２．格子巾を半分（$\delta = 0.5$）にしたときの近似値を上と同様にして求めた場合の結果は、近似的な最適点は $(\lambda_X, \lambda_Y) = (2.5, 2.5)$ で近似的な最適値は $v(\lambda_X, \lambda_Y) = 11.0267$ である。

３．格子巾をさらに細かくして $\delta = 0.1$ としたときの結果は、近似的な最適点は $(\lambda_X, \lambda_Y) = (2.7, 2.5)$ で近似的な最適値は $v(\lambda_X, \lambda_Y) = 11.0530$ である。

４．格子巾をさらに細かくして $\delta = 0.05$ としたときの結果は、近似的な最適点は $(\lambda_X, \lambda_Y) = (2.70, 2.45)$ で近似的な最適値は $v(\lambda_X, \lambda_Y) = 11.0537$ である。

５．格子巾をもっと細かくして $\delta = 0.025$ としたときの結果は、近似的な最適点は $(\lambda_X, \lambda_Y) = (2.70, 2.45)$ で近似的な最適値は $v(\lambda_X, \lambda_Y) = 11.0537$ である。このくらい細かく取ると、最適解に十分近くなっていると考えられる。

10.6　資産配分と経営戦略

上での議論は、いくつかの固定されたプロジェクトを元にそれの組み合わせ（ポートフォリオ）による最適化であった。この問題を、複数のプロジェクトの組み合わせ全体を一つの統合されたプロジェクトと見て議論することも可能である。その場合には、第８章での議論をこの問題に当てはめての議論となる。その立場から見ると、本章でのポートフォリオとしての議論はリアルオプション・アプローチとしての戦略のうち、初期投資額を決める戦略のみを扱った問題になっている。

このように見ると、第８章での評価の理論は、一つの企業の活動全体を総合的に評価（企業評価）する方法になっていることが分かる。しかし、大きな企業の場合にそれを実行しようとするとあまりに複雑なモデルになってしまい実行不可能であろう。したがって、第８章の手法による企業評価が実用性を持ちうるのは小規模な企業の場合であり、複数のプロジェクトの統合的な評価にはこの第１０章で述べたポートフォリオ戦略が現実的であると言えよう。

第11章　市場を考慮に入れた評価

プロジェクトの評価をする場合、市場を考慮に入れて評価する必要は常に生じる。その場合、二つの立場が考えられる。一つは、プロジェクトの推進者の立場から、プロジェクトに内包されているリスクを市場を利用してヘッジする方法を考えるという立場である。もう一つは、金融市場における投資家の立場から、投資対象としてのプロジェクトの市場価値を評価しようという立場である。

このそれぞれの立場からの評価について考察を加えたい。

11.1　プロジェクト推進者の立場からの評価

プロジェクトと関連のある金融商品の市場がある場合、その市場を使うことによりリスクを回避できる可能性がある。すなわち、市場を考慮に入れたプロジェクトの価値 $\hat{V}^{(m)}$ を次式により導入する。

$$\hat{V}^{(m)} = \sup_{\Phi,\theta}\left\{U^{(\alpha)}\left(RPV(\mathbf{C}^{\Phi}) + (\theta \cdot S)_T\right)\right\}. \tag{11.1}$$

ここで、$(\theta \cdot S)_T$ は、$S_t = (S_t^{(0)}, S_t^{(1)}, \ldots, S_t^{(d)})$ を市場における金融資産の価格過程、$\theta = (\theta_t^{(0)}, \theta_t^{(1)}, \ldots, \theta_t^{(d)})$ を投資戦略として、

$$(\theta \cdot S)_T = \sum_0^d \int_0^T \theta_{t-}^{(j)} dS_t^{(j)}$$

により与えられる。

定義より、

$$\hat{V}^{(m)} = \sup_{\Phi,\theta}\left\{U^{(\alpha)}\left(RPV(\mathbf{C}^{\Phi}) + (\theta \cdot S)_T\right)\right\} \geq \sup_{\Phi} U^{(\alpha)}(RPV(\mathbf{C}^{\Phi})) = \hat{V}$$

が成立しており、$\hat{V}^{(m)} > \hat{V}$ が成立するとき、市場を利用したリスクの回避手段を利用することを前提にして、「プロジェクトの価値は $\hat{V}^{(m)}$ である」、と判断することになる。この結果として、市場を考慮に入れない場合には採択されなかったプロジェクトでも、市場を考慮に入れることにより採択可能なプロジェクトと判定される可能性が出てくる。

この場合、$\hat{V}^{(m)}$ と $\hat{V}$ との差 $\hat{V}^{(m)} - \hat{V}$ は市場の効果であり、市場を利用することにより回避されたリスクの価値であると言える。

市場を利用したリスクのヘッジの可能性を考えるという意味では、[36] の加法モデルを利用した方法も参考になる。その他の市場の利用法としては、実物先物の価格などの、プロジェクトが生み出すキャッシュフローと関連があると考えられる市場の情報を利用することも有効であろう。このようなアプローチの例としては、[30] 等がある。

11.2　市場を考慮に入れたプロジェクト価値 $\hat{V}^{(m)}$ の計算法

リスク鋭感的価値尺度の最大化問題は、指数型効用関数に対する期待効用最大化の問題と同値である。そのことより、次のような評価が可能になる。

まず、指数型効用関数の期待効用最大化に対して、双対定理により次の等式が成立する。

$$\begin{aligned}
& \sup_{\theta\in\Theta} E\left[u_\alpha\left(X+\theta\cdot S_T\right)\right] \\
= \;& \inf_{\lambda>0}\left\{\inf_{Q\in\mathcal{M}}\left\{E\left[u_\alpha^*\left(\lambda\frac{dQ}{dP}\right)\right]+\lambda E_Q[X]\right\}\right\} \\
= \;& \inf_{\lambda>0}\left\{\inf_{Q\in\mathcal{M}}\left\{\frac{1}{\alpha}\left(\lambda H(Q|P)+\lambda\log\lambda-\lambda+1\right)+\lambda E_Q[X]\right\}\right\} \\
= \;& \frac{1}{\alpha}\inf_{\lambda>0}\left\{(\lambda\log\lambda-\lambda+1)+\lambda\inf_{Q\in\mathcal{M}}\left\{H(Q|P)+\alpha E_Q[X]\right\}\right\} \\
= \;& \frac{1}{\alpha}\left(1-\exp\left\{-\inf_{Q\in\mathcal{M}}\left\{H(Q|P)+\alpha E_Q[X]\right\}\right\}\right). \qquad (11.2)
\end{aligned}$$

この結果から、リスク鋭感的価値尺度の最大化について次の結果が得られる。

$$\begin{aligned}
& \sup_{\theta}\left\{U^{(\alpha)}\left(X+\theta\cdot S_T\right)\right\} \\
= \;& -\frac{1}{\alpha}\log\left(\inf_{\theta}\left\{E\left[e^{-\alpha(X+\theta\cdot S_T)}\right]\right\}\right) \\
= \;& -\frac{1}{\alpha}\log\left(\inf_{\theta}\left\{E\left[1-\alpha u_\alpha\left(X+\theta\cdot S_T\right)\right]\right\}\right) \\
= \;& -\frac{1}{\alpha}\log\left(1-\left(1-\exp\left\{-\inf_{Q\in\mathcal{M}}\left\{H(Q|P)+\alpha E_Q[X]\right\}\right\}\right)\right) \\
= \;& \frac{1}{\alpha}\inf_{Q\in\mathcal{M}}\left\{H(Q|P)+\alpha E_Q[X]\right\}. \qquad (11.3)
\end{aligned}$$

次に、戦略 Φ を固定した上でのキャッシュフロー $\mathbf{C}^\Phi$ の市場を考慮に入れた価値 $V^{(m)}(\mathbf{C}^\Phi)$ は

$$\begin{aligned}
V^{(m)}(\mathbf{C}^\Phi) &= \sup_{\theta}\left\{U^{(\alpha)}(RPV(\mathbf{C}^\Phi)+\theta\cdot S_T)\right\} \\
&= -\frac{1}{\alpha}\log\left(\inf_{\theta}\left\{E\left[e^{-\alpha\left(RPV(\mathbf{C}^\Phi)+\theta\cdot S_T\right)}\right]\right\}\right) \\
&= \frac{1}{\alpha}\inf_{Q\in\mathcal{M}}\left\{H(Q|P)+\alpha E_Q[RPV(\mathbf{C}^\Phi)]\right\}, \qquad (11.4)
\end{aligned}$$

となる。こうして

$$\begin{aligned}
\overline{V}^{(m)} &= \sup_{\Phi} V^{(m)}(\mathbf{C}^\Phi)=\sup_{\Phi,\theta}\left\{U^{(\alpha)}(RPV(\mathbf{C}^\Phi)+\theta\cdot S_T)\right\} \qquad (11.5) \\
&= \sup_{\Phi}\left\{\frac{1}{\alpha}\inf_{Q\in\mathcal{M}}\left\{H(Q|P)+\alpha E_Q[RPV(\mathbf{C}^\Phi)]\right\}\right\} \qquad (11.6)
\end{aligned}$$

なる関係式が得られた。

上のような評価がなされた上では、プロジェクトの採否に関しては

$$\overline{V}^{(m)} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{accept.} \tag{11.7}$$
$$\overline{V}^{(m)} < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{reject.} \tag{11.8}$$

なる判定がなされることになろう。MEMM で測られていることに注意しておこう。

11.3 プロジェクトへの投資家の立場からの評価

あるプロジェクトへの融資を検討している個人または金融機関の立場からの評価を考察してみる。この場合にも、プロジェクトの価値は、先ほどと同じ $\hat{V}^{(m)}$ であると判断されよう。ただし、この場合の投資家にとってのプロジェクトの市場での価値は、

$$\hat{V}^{(m)} - \sup_{\theta} \left\{ U^{(\alpha)} \left((\theta \cdot S)_T \right) \right\}$$

である。すなわち、このプロジェクトを投資対象に加えることによって増加した最適投資の価値が、投資家の立場から見たプロジェクトの価値となる。もしもこの値が負であれば、投資家にとってこのプロジェクトへの投資は魅力無いものと判断されよう。

11.4 プロジェクトの市場からの評価

効用無差別価格理論に基づく市場からの評価は、次の方程式

$$\sup_{\Phi,\theta} E \left[u_\alpha \left(RPV(\mathbf{C}^{\Phi}) - p + \theta \cdot S_T \right) \right] = \sup_{\theta} E \left[u_\alpha \left(\theta \cdot S_T \right) \right] \tag{11.9}$$

を満たす p の値である。

注。プロジェクトのリターンを何らかの意味でのオプションに見立てることができる場合には、裁定理論（リスク中立測度）による評価が可能となる。

11.5 企業価値評価

企業の各部門を一つのプロジェクトとみなし、それらをポートフォリオの成分とみなす。各部門から生み出されるキャッシュフローの t-時点での現在価値をその分野の価格過程に見立て、プロジェクト推進過程での戦略 Φ をポートフォリオ戦略と見立てることにより、企業価値評価の問題を最適ポートフォリオの価値評価の問題に置き換えることができる。（この問題は第８章および第１０章で検討してきたことである。）

この視点は、企業における総合的リスク管理（ERM）の課題と関わった研究課題として重要である。この問題も、前章の「事業ポートフォリオの評価」の議論と同様に、「リスク鋭感的価値評価法」の立場からの理論構成が可能である。

第12章　まとめ

本稿において、「リスク鋭感的価値尺度法」の特性をまとめて説明すると同時に、その適用法について説明した。今後この方法を具体的な事例に適用して、旧来の評価法との違いや有効性を実証的に見てゆくことが必要である。すでに [18] や [27] で検討がなされており、また関連のある話題として [1]、[12]、[16]、[17] などがあるが、さらに多くの関連分野への適用を目指したい。特に、企業価値評価や企業における総合的リスク管理（ERM）の課題にも応用可能であり、この方面への応用は今後の研究課題である。

また、「リスク鋭感的価値尺度法」を適用するための分かり易い処方箋を用意することも必要であろう。本稿での数値計算は FreeMat を用いて行ったが、それらの計算法も整理して、MATLAB などを利用した評価法の処理ソフトを開発することも今後の課題である。

参考文献

[1] Ban, R., Misawa, T. and Miyahara, Y. (2016), Valuation of Hong Kong REIT based on Risk Sensitive Value Measure Method,*International Journal of Real Options and Strategy* 4 (2016),1-33.

[2] Carmona, R. (ed.) (2008), *Indifference Pricing: Theory and Applications*, Princeton Series in Financial Engineering.

[3] Cheridito, P., Delbaen, F. and Kupper, M. (2006), Dynamic Monetary Risk Measures for Bounded Discrete-Time Processes, Electronic J. Probab. 11, 57-106.

[4] Cheridito, P. and Kupper, M. (2006a),Composition of Time-Consistent Dynamic Monetary Risk Measures in Discrete Time, (preprint).

[5] Cheridito, P. and Kupper, M. (2006b), Time-Consistency of Indifference Prices and Monetary Utility Functions, (preprint).

[6] Delbaen, F. and Schachermayer, W. (2005), *The Mathematics in Arbitrage*, Springer.

[7] Dixit, A. and Pindyck, R. S. (1994), *Investment under Uncertainty,* Princeton University Press, Princeton.

[8] Föllmer, H. and Schied, A. (2004), *Stochastic Finance* (2nd Edition), Walter de Gruyer, Berlin and New York.

[9] Fujiwara, T. (2006), From the minimal entropy martingale measures to the optimal strategies for the exponential utility maximization: the case of geometric Lévy processes, *Asia-Pacific Financial Markets*, Vol.11, pp.367–391.

[10] Hayashida, M., Miyauchi, H. and Misawa, T. (2014), Asset Evaluation of Thermal Power Plant Project by Pobit Model, The 20th International Conference on Electrical Engineering, June 15-19, 2014 Jeju, Korea.

[11] T. Hirose, H. Miyauchi, and T. Misawa (2012), ‘Project Value Assesment of Thermal Power Plant Based on RNPV Probit Model Considdering Real Options,’ *J. Real Options and Strategy*, Vol.5, 1-18.

[12] 平田直樹、宮内　肇、三澤哲也 (2009)、「UNPV 方の簡約化に関する基礎的検討」、電気学会　電力技術・電力系統技術合同研究会（2009 年 9/15-17, 早稲田大学）発表論文。

[13] Jeanblanc, M., Kloeppel, S. and Miyahara, Y. (2007), Minimal f^q-martingale measures for exponential Lévy processes, *The Annals of Applied Probability*, 17, pp.1615-1638.

[14] Kupper, M. and Schachermayer, W. (2009), Representation Results for Law Invariant Time Consistent Functions, *Mathematics and Financial Economics*, Vol.2, No.3, 189-210.

[15] 北原　康富, 「企業実務におけるリスクとオプションの評価とその応用」, 〔Risk Workshop 2008〕「リアルオプションと経営戦略」(名古屋市立大学経済学研究科) における講演資料。（2008.2.9）

[16] Misawa, T. (2010), Simplification of Utility Indifference Net Present Value Method, *OIKONOMIKA, Nagoya City University*, Vol.46, No.3, 123-135.

[17] Mishiro, J., Miyauchi, H. and Misawa, T. 'Project Value Assessment of Thermal Generation Plant by Utility Indifference Net Present Value." The 2008 Annual Meeting Record IEE Japan, Vol.6, No.6-040, p.69(2008).（三代　純也、宮内　肇、三澤哲也：「UNPV 法による火力発電事業の事業価値評価」、平成 20 年電気学会全国大会、福岡工業大学、2007 年 3 月 21 日）

[18] 三輪昌隆、宮原孝夫 (2010)、「設備維持管理計画の価値評価に対する制御マルコフ過程によるリアルオプションアプローチ」、リアルオプション研究、Vol.3, No.1, 1-23.

[19] 宮原　孝夫、「株価モデルとレヴィ過程」、朝倉書店、2003 年

[20] 宮原　孝夫 (2006), 「期待効用理論に基づくプロジェクトの価値評価法」、*Discussion Papers in Economics, Nagoya City University,* No. 446, pp. 1-21.

[21] Miyahara, Y. (2009), Value Measures for Project Evaluation, *Discussion Papers in Economics, Nagoya City University,* No.496. 1-15.

[22] Miyahara, Y. (2010), Risk-Sensitive Value Measure Method for Projects Evaluation, *Journal of Real Options and Strategy*, Vol.3, No.2, pp.185-204.

[23] 宮原　孝夫 (2011)、「リスク鋭感的価値尺度によるプロジェクトの評価」、*Discussion Papers in Economics, Nagoya City University*, No.531, 1-29.

[24] Miyahara, Y. (2012), *Option pricing in Incomplete Markets: Modeling Based on Geometric Levy Processes and Minimal Entropy Martingale Measures*, ICP.

[25] 宮原　孝夫（2013)、「規模のリスクとその評価」、オイコノミカ（名古屋市立大学・経済学研究科紀要)、第４９巻、2013.3.15、pp.45-56。

[26] Miyahara, Y. (2014), Evaluation of the Scale Risk, it RIMS Kokyuroku, No.1886, 'Financial Modeling and Analysis (2013/11/20–2013/11/22), pp. 181-188.

[27] Miyahara, Y. and Tsujii, Y.(2011), Applications of Risk-Sensitive Value Measure Method to Portfolio Evaluation Problems, *Discussion Papers in Economics, Nagoya City University*, No. 542, pp. 1-12.

[28] Miyauchi, H., Hirata, N. and Misawa, T. (2011), Risk Assesment for Generation Investment by Probit Model Simplified UNPV Method, (preprint).

[29] Miyauchi, H., Miyahara, K., Misawa, T. and Okada, K., "Risk Assessment for Generation Investment based on Utility Indifference Pricing", Proceedings of CIGRE Symposium Osaka Japan 2007, "System Development and Asset Management under Restructuring", Paper #405, (2007) pp.1-6.

[30] 中岡　英隆、「リアル・オプションによる資源開発プロジェクトの事業価値評価」、『ジャフィー・ジャーナル：非流動性資産の価格付けとリアルオプション』、朝倉書店，74-105，2008 年

[31] Nutz, M. (2009), Power Utility Maximization in Constrained Exponential Lévy Models, (preprint).

[32] Owari, K. (2010), Robust exponential hedging and indifference valuation, *International Journal of Theoretical and Applied Finance,* 13 (07), 1075-1101.

[33] Owari, K. (2011), A Note of Utility Maximization with Unbounded Random Endowment, *Asia-Pacific Financial Markets,* 18 (1), 89-103.

[34] Rolski, T., Schmidli, H., Schmidt, V. and Teugels, J. (1999), *Stochastic Processes for Insurance and Finance,* Wiley.

[35] Vostrikova, L. (2011), An f-divergence approach for optimal portfolios in exponential Lévy models, (preprint).

[36] Yamada, Y. (2011), Optimal Hedging with Additive Models, *Proceedings of the 2010 KIER-TMU International Workshop on Financial Engineering*, 1-21.

著者略歴 2017年3月1日現在

宮原　孝夫（みやはら　よしお）名古屋市立大学名誉教授

学歴・学位

1967.3　京都大学理学部数学科　卒業
1969.3　京都大学大学院理学研究科修士課程数学専攻　修了（ 理学修士）
1980.1　理学博士（名古屋大学・論文博士）

職歴

1969.4　名古屋大学理学部助手
1973.6　静岡大学教養部講師(数学)
1976.4　名古屋市立大学経済学部助教授
1987.4　名古屋市立大学経済学部教授
2002.4　名古屋市立大学大学院経済学研究科長（経済学部長兼務）（～2004.3）
2004.4　名古屋市立大学大学院経済学研究科附属経済研究所長（兼務）（～2008.3）
2010.3　名古屋市立大学定年退職　（名古屋市立大学名誉教授の称号授与）
2010.4　名古屋市立大学大学院経済学研究科・特任教授　（現在に至る）
2013.4　立命館大学客員教授（～2016.3）

学会関連

・Bachelier Finance Society 評議員　2004.1.1～2007.12.31
・日本リアルオプション学会（JAROS）評議員　2006.7～2009.3, 2011.4～2015.3
・日本金融・証券計量・工学学会（JAFEE）会長　2011.7～2013.6

著書

・Yoshio Miyahara, *Stochastic Evolution Equations and White Noise Analysis*, Carleton Mathematical Lecture Notes, 42. 1982
・宮原　孝夫、『株価モデルとレヴィ過程』、朝倉書店、2003年。
・Yoshio Miyahara, *Option Pricing in Incomplete Markets: Modeling Based on Geometric Levy Processes and Minimal Entropy Martingale Measures,* Imperial College Press, 2012

プロジェクトの総合的評価理論『リスク鋭感的価値尺度法』

日本リアルオプション学会機関誌

リアルオプションと戦略　第9巻 第2号(特別号)

研究叢書　第1号

2017年4月30日 発行

著者: 宮原 孝夫

発行所:日本リアルオプション学会

THE JAPAN ASSOCIATION OF REAL OPTIONS AND STRATEGY　WWW.REALOPN.JP

発行者: 機関誌編集委員会　委員長 :　高森寛　委員: 森平爽一郎、中岡英隆、伊藤晴祥

表紙デザイン: 平本 和博
印刷所:　　　株式会社共立
学会事務連絡: 〒104-0033 東京都中央区新川2-22-4 新共立ビル2F

日本リアルオプション学会
The Japan Association of Real Options and Strategy

発行 日本リアルオプション学会
www.realopn.jp